第二章　矩 阵

- 矩阵的运算
- 几种特殊矩阵
- 分块矩阵
- 逆矩阵
- 初等矩阵

§2.1　矩阵的运算

一、矩阵的概念

术语：矩阵（数域F上的矩阵），记作A，$A_{m\times n}$，$(a_{ij})_{m\times n}$

几种特殊矩阵

(1) 行数与列数都等于n的矩阵A，称为n阶**方阵**. 也可记作A_n.

(2) **向量是特殊的矩阵**, 例如$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 为$1\times n$矩阵.

$$\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ 为$n\times 1$矩阵

（3）元素全为零的矩阵称为**零矩阵**，$m \times n$ 零矩阵，记作 $o_{m\times n}$ 或 O .

【注】不同阶数的零矩阵是不相等的.

例如 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

（4）形如 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ 的方阵称为**对角阵**.

不全为0

记作 $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$

(5) 方阵

$$E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

称为单位矩阵（或单位阵）

全为1

$$(6)\ -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为A的负矩阵

术语 两个矩阵的行数相等，列数相等时，称为同型矩阵.

矩阵相等的定义

两个矩阵 $A=(a_{ij})$与$B=(b_{ij})$为同型矩阵,并且对应元素相等,即 $a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$,

则称矩阵A与B相等,记作$A=B$.

1.矩阵的加法

定义 设有两个$m\times n$矩阵 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$, 那么矩阵A与B的和记作$A+B$ ，规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

说明 只有同型矩阵才能进行加法运算.

由矩阵的加法和负矩阵可定义矩阵的减法

$$A-B=A+(-B)=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵加法的运算律

$(1)\ A+B=B+A;$

$(2)\ (A+B)+C=A+(B+C).$

$(3)\ A+O=A,\ A+(-A)=O;$

$(4)\ A-A=A+(-A)=O.$

2. 数与矩阵的乘法

定义 数λ与矩阵A的乘积记作λA或$A\lambda$,规定为

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

【注1】矩阵所有元素的公因子可以提到矩阵符号外.

【注2】思考数乘行列式与数乘矩阵的差异：例如

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

数乘矩阵的运算律

（设 A、B 为 $m\times n$ 矩阵，λ,μ 为数）

$(1)\ \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;　$(2)\ (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;

$(3)\ (\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$;　$(4)\ 1\cdot A=A$.

矩阵加法与数乘矩阵合起来, 统称为矩阵的线性运算.

例1 矩阵 X 满足 $X+2A=B-X$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&4\\6&8\end{pmatrix}$$ 求 X .

解 $2X=B-2A$, $X=\frac{1}{2}(B-2A)=\frac{1}{2}B-A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3\\4&3\end{pmatrix}$

3. 矩阵乘法

引例 甲、乙两厂，生产三种产品Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ，各厂生产各种产品的产量列为矩阵A，

三种产品单位产量的价格与耗电、耗水、耗油量列为矩阵B

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} I & II & III \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{甲} \\ \text{乙} \end{array} \qquad B=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{单价} & \text{耗电} & \text{耗水} & \text{耗油} \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ I \\ II \\ III \end{array}$$

分别计算甲厂、乙厂的收入、耗电，耗水、耗油总量.

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{23} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} & a_{11}b_{14}+a_{12}b_{24}+a_{13}b_{34} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{14}+a_{22}b_{24}+a_{23}b_{34} \end{pmatrix}$$

“第一行四个元素”为甲厂产品的总收入, 总耗电, 总耗水、总耗油量

矩阵的乘法定义

设 $A=(a_{ij})$是一个 $m\times s$矩阵，$B=(b_{ij})$ 是一个 $s\times n$ 矩阵，规定矩阵 A 与矩阵 B 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})$，即

$$A=(a_{ij})_{m\times s}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix},\qquad B=(b_{ij})_{s\times n}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

并把此乘积记作 $C=AB.$

例如 $c_{2n}=a_{21}b_{1n}+a_{22}b_{2n}+\cdots+a_{2s}b_{sn}=\sum_{k=1}^{s}a_{2k}b_{kn}$

【注】只有当左边矩阵的列数等于右边矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘.

例2

$$C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}_{2\times 2}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}_{2\times 2}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix}_{2\times 2}$$

例3 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 5 & -1 & 4\end{pmatrix}_{3\times 4} \quad B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}_{4\times 3}$$

解 $\because A=(a_{ij})_{3\times 4},\quad B=(b_{ij})_{4\times 3},$

$\therefore C=(c_{ij})_{3\times 3}.$

故

$$C=AB=\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\-1&1&3&0\\0&5&-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3&4\\1&2&1\\3&1&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-5&6&7\\10&2&-6\\-2&17&10\end{pmatrix}.$$

例4 计算

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(14)=14$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 6\\3 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

例5 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}$

计算 AB, BA.

解 $AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}-1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$

【注】矩阵乘法的特殊性：不满足交换律！

- 强调AB为A左乘B，或B右乘A.
- 若$AB=BA$，称A、B是**可交换的**.
- $AB=O \not\Rightarrow A=O$或$B=O$.

可交换的两矩阵必为同阶方阵

例6 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 求 AC, BC

解

$$AC=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad BC=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

即 $AC=BC$, 但 $A\neq B$.

【注】矩阵乘法的特殊性：不满足消去律！

$$AC=BC \not\Rightarrow A=B.$$

例 7 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},\quad 0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{m\times 1}$$

分析 $AX=B$，$AX=O$ 的含义.

解析

$$AX=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}=B$$

说明 方程组的又一种表示方法—矩阵表示.

矩阵乘法的运算律

$(1)\ (AB)C = A(BC)$;

$(2)\ A(B+C) = AB + AC,\ (B+C)A = BA + CA$;

$(3)\ \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ （其中λ 为数）；

（4）$E_m A_{m\times n} = A_{m\times n}$，$A_{m\times n}E_n = A_{m\times n}$

单位阵名称的由来

其中 E_m, E_n 分别为m阶，n阶单位阵.

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

例８ 设 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 是齐次线性方程组AX=0的解，证明 $\eta = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_s\eta_s$ 是齐次线性方程组AX=0的解.

4. 方阵的幂及其性质

若A是n阶方阵，则A^k为A的 k次幂，即

$$A^k = \underbrace{A\,A\cdots A}_{k\text{个}} \quad \text{并且} A^m A^k = A^{m+k}, \left(A^m\right)^k = A^{mk}.$$

（m, k 为自然数）

【注1】规定 $A^0 = E$.

【思考】$E^k = ?$　答：$E^k = E$.

例9 判断下列结论是否成立？

（1）$A^2 = O$, 则 $A = O$ ✗　反例 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

（2）$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ✗

（3）$(E+A)^2 = E + 2A + A^2$ ✓

【注2】由于矩阵乘法一般不满足交换律，即：

$$AB \neq BA,\ (AB)^k \neq A^k B^k.$$

【思考】什么条件下，有 $(AB)^k = A^k B^k$？

答：$AB=BA$.

5. 矩阵的转置

分析 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ 的关系．其中 $a_{ij}=b_{ji}$

记 $B=A^T, A=B^T$.

定义 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \text{与} B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \vdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \vdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n\times m}$$

称 A, B互为**转置矩阵**，记 $B=A^T, A=B^T$

即 设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$B=\left(b_{ij}\right)_{n\times m}$，若

$$a_{ij}=b_{ji}, \ i=1,2,\cdots m, j=1,2,\cdots,n$$

称 A, B 互为转置矩阵.

例如

$$B=(8,\ 2,\ 4,\ \ 6), \qquad B^T=\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

转置矩阵的运算性质

$(1)\left(A^T\right)^T = A$; $(2)(A+B)^T = A^T + B^T$; $(3)(\lambda A)^T = \lambda A^T$;

$\boxed{(4)(AB)^T = B^T A^T;}$ $\boxed{(5)\, r(A^T) = r(A).}$

推广 $(A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n)^T = A_n{}^T A_{n-1}{}^T \cdots A_2{}^T A_1{}^T$

例10 $\alpha = (-1,\ 2,\ 1),\ \beta = (1,\ 1,\ -3)$，$A = \alpha^T\beta$，求$A^n$.

解 由 $\beta\alpha^T = (1,1,-3)\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = -2$，利用矩阵乘法的结合律,

$$A^n = (\alpha^T\beta)^n = (\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)\cdots(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta) = \alpha^T(\beta\alpha^T)\beta\cdots\alpha^T(\beta\alpha^T)\beta$$

$$= \alpha^T(-2)^{n-1}\beta = (-2)^{n-1}\alpha^T\beta = (-2)^{n-1}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 3\\ 2 & 2 & -6\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

6. 方阵的行列式

定义 由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式，叫做方阵 A 的行列式，记作 $|A|$ 或 $\det A$.

n阶矩阵

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A的行列式

$$|A_n| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ 则 $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -2.$

方阵行列式的性质

$(1)\ \left|A^T\right| = |A| = \left|A\right|^T \qquad (2)\ |kA| = k^n|A|;$

A,B为同阶方阵

$(3)\ |AB| = |A||B| = |B||A| = |BA| \Rightarrow |AB| = |BA|.$

$$\left|2\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix}2 & 4 & 6\\ 8 & 10 & 12\\ 14 & 16 & 18\end{vmatrix} = 2^3\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}$$

推广 $|A_1A_2\cdots A_s| = |A_1||A_2|\cdots|A_s|$

都是同阶方阵

【注】 $A_{m\times n}, B_{n\times m}(m \neq n)$,不一定有 $|A_{m\times n}B_{n\times m}| = |B_{n\times m}A_{m\times n}|$

3.2 几种特殊矩阵（均为方阵）

1. 对角矩阵

形如 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ 的方阵，称为对角矩阵（或对角阵）.

不全为0

记作 $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$

性质

(1) 对角矩阵的和（差）、数乘，仍为对角矩阵；

(2) 两个对角矩阵的积仍为对角矩阵，且是可交换的.

(3) 对角矩阵的转置为本身.

2. 单位矩阵(特殊的对角阵)

$$E = E_n = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array}$$

称为**单位矩阵**（或**单位阵**）.

性质 $E_m A_{m\times n} = A_{m\times n}$, $A_{m\times n} E_n = A_{m\times n}$,

$$A^0 = E, \quad E^k = E.$$

【注】单位矩阵E在矩阵乘法中相当于数1在数的乘法运算中的作用!

单位矩阵的行列向量组都是基本单位向量组.

3. 数量矩阵 $\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}$ (特殊的对角阵)

性质

$$\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}_m A_{m\times n} = aE_m A_{m\times n} = aA_{m\times n}$$

$$A_{m\times n}\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}_n = aA_{m\times n}E_n = aA_{m\times n}$$

【注】数量矩阵乘矩阵相当于数乘矩阵！

4. 三角形矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{或} B=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

若 $A_n=\left(a_{ij}\right)_n$ 满足 $i>j$ 时 $a_{ij}=0$，称为上三角形矩阵.

性质

1. 上三角形矩阵之和（差），仍为上三角形矩阵.

2. 数乘上三角形矩阵，仍为上三角形矩阵.

3. 两个上三角形矩阵的积，仍为上三角形矩阵.

（下三角形矩阵性质）

5．对称矩阵与反对称矩阵

如果 $A^T = A$ ，则称A为对称矩阵.

如果 $A^T = -A$ ，则称A为反对称矩阵.

【注】A为对称矩阵$\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$， $i, j = 1, 2, \cdots, n$

A为反对称矩阵$\Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji}$， $i, j = 1, 2, \cdots, n$

反对称矩阵 $a_{ii} = 0$.

例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

A为对称矩阵.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \\ -5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -4 & 2 & 6 \\ -5 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

是否为反对称矩阵？

C是反对称矩阵.

性质

A, B 为对称矩阵 $\Rightarrow A \pm B,\ kA,\ A^k$ 仍为对称矩阵.

【注】AB 不一定仍为对称矩阵.

反例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

A, B 为反对称矩阵 $\Rightarrow A \pm B,\ kA$ 仍为反对称矩阵.

A^{2k+1} 为反对称矩阵

A^{2k} 为对称矩阵

【注】AB 不一定仍为反对称矩阵.

反例 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

例1 设列矩阵 $X=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T$满足 $X^TX=1$, E为n阶单位矩阵, $H=E-2XX^T$, 证明H是对称矩阵, 且$HH^T=E$.

证明 $\because H^T=\left(E-2XX^T\right)^T=E^T-2\left(XX^T\right)^T$

$$=E-2XX^T=H,$$

$\therefore H$是对称矩阵.

$$HH^T=H^2=\left(E-2XX^T\right)^2$$

$$=E-4XX^T+4\left(XX^T\right)\left(XX^T\right)=E-4XX^T+4X\left(X^TX\right)X^T$$

$$=E-4XX^T+4XX^T=E.$$

【小结】

矩阵运算
- 加法
- 数与矩阵相乘
- 矩阵与矩阵相乘
- 转置矩阵
- 方阵的行列式

注意

（1）只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

（2）矩阵的数乘运算与行列式的数乘运算不同.

（3）只有当左边矩阵的列数等于右边矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘，且矩阵相乘一般不满足交换律和消去律.

特殊矩阵

零矩阵;

方阵 $(m = n)$;

行矩阵与列矩阵;

单位矩阵;

数量矩阵;

对角矩阵;

上(下)三角形矩阵;

对称矩阵与反对称矩阵.

均为方阵

2.3 分块矩阵

对于行数和列数较高或者结构特殊的矩阵A，为了简化运算，经常采用分块法，使大矩阵的运算化成小矩阵的运算. 具体做法是：将矩阵A用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为A的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.

引例 线性方程组 $AX = B$ 的增广矩阵

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \cdots & \cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) = (AB)$$

A 为系数矩阵， B 为常数项.

$$A = (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n)$$

β_j 为未知数 x_j 在各方程中的系数

$$\beta_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i = (a_{i1} a_{i2} \cdots a_{in})$$

α_i 为第 i 个方程中各未知量的系数.

一、矩阵的分块

例 $$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix},$$

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix},$$

即

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

【分块原则】 横竖画直线，保证同列块列数相同，保证同行块行数相同

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A & O \\ E & B \end{pmatrix},\quad A=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$

二、分块矩阵的运算

分块矩阵运算进行的基本原则：

- 分块计算与不分块计算的结果一致；
- 两种计算方法的运算法则一致；
- 块也是矩阵，块的运算仍然是矩阵的运算；

◆分块矩阵的加法

(1)设矩阵A与B的行数相同,列数相同,采用相同的分块法,有

$$A=\begin{pmatrix}\boxed{A_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{s1} & \cdots & A_{sr}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\boxed{B_{11}} & \cdots & \boxed{B_{1r}}\\ \vdots & & \vdots\\ B_{s1} & \cdots & B_{sr}\end{pmatrix}$$

其中A_{ij}与B_{ij}的行数相同,列数相同,那么

$$A+B=\begin{pmatrix}\boxed{A_{11}+B_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}+B_{1r}}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr}\end{pmatrix}.$$

【注】 分块矩阵的加法要求A、B的分块方法必须完全一致.

例

$$A+B=\left(\begin{array}{c:cc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hdashline 7 & 8 & 9 \end{array}\right)+\left(\begin{array}{c:cc} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \\ \hdashline -7 & -8 & -9 \end{array}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \\ (7)+(-7) & (8 \quad 9)+(-8 \quad -9) \end{pmatrix}$$

本质是对应
元素相加结
果显然一致

◆分块矩阵的数乘

(2) 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, λ 为数, 那么

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}.$$

例

$$A=\left(\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$5A=5\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5A_{11} & 5A_{12} \\ 5A_{21} & 5A_{22} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 5\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} & 5\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ 5\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|cc} 15 & 0 & -10 \\ 5 & 10 & 0 \\ \hline 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

本质是数乘每一个元素，结果显然一致!

◆分块矩阵的乘法

【法则】左边矩阵第i行块与右边矩阵第j列块对应块相乘相加为积矩阵中第i行j列块 C_{ij}.

引例

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&-2&0\\0&1&0&-2\\0&0&5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\1&2\\0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{3}&-2\\1&2\\0&5\end{pmatrix}$$

3×4 4×2 3×2

【法则】左边矩阵第i行块与右边矩阵第j列块对应块相乘相加为积矩阵中第i行j列块 . C_{ij}

【讨论】如何分块使法则可行？

① $=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 3 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ \hline 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \end{pmatrix}$$

分析可乘否？

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

不可乘!

【法则】左边矩阵第i行块与右边矩阵第j列块对应块相乘相加为积矩阵中第i行j列块 C_{ij}.

$$②=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-2&0\\0&1&0&-2\\\hline 0&0&5&3\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}3&0\\1&2\\\hline 0&1\\0&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A_{11}B_1+A_{12}B_2\\A_{21}B_1+A_{22}B_2\end{pmatrix}$$

分析可乘否?

$$A_{11}B_1+A_{12}B_2=$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&0\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\1&2\end{pmatrix}$$

$$A_{21}B_1 + A_{22}B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AB = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 3 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 3 & -2 \\ 1 & 2 \\ \hline 0 & 5 \end{array}\right)$$

【分块原则】必须使左边矩阵列的分法与右边矩阵行的分法完全一致!

【练习】

$$A_{3\times4}B_{4\times2}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$AB=\left(\begin{array}{c:ccc}1 & 0 & -2 & 0\\ \hdashline 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 5 & 3\end{array}\right)\left(\begin{array}{c:c}3 & 0\\ \hdashline 1 & 2\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}\\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{pmatrix}$$

◆分块矩阵的乘法

(3) 设A为$m \times l$矩阵, B为$l \times n$矩阵, 分块成

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix},$$

其中$A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{it}$的列数分别等于$B_{1j}, B_{2j}, \cdots, B_{ij}$的行数, 那末

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$$

其中$C_{ij} = \sum_{k=1}^{t} A_{ik} B_{kj} \quad (i = 1, \cdots, s; j = 1, \cdots, r).$

例 理解常用分块

$$AB=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|c|c|c}2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{array}\right)=\begin{pmatrix}20&26&32&38\\47&62&77&92\end{pmatrix}$$

2×4

（1） B按列分块

$$AB=A\begin{pmatrix}B_1&B_2&B_3&B_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AB_1&AB_2&AB_3&AB_4\end{pmatrix}$$

可乘否？怎么乘？

$$=\left(\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}\right)$$

（2）$\boldsymbol{A}$ 按行分块

$$\boldsymbol{AB}=\left(\begin{array}{ccc}1 & 2 & 3\\ \hline 4 & 5 & 6\end{array}\right)\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 6\\ 4 & 5 & 6 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20 & 26 & 32 & 38\\ 47 & 62 & 77 & 92\end{pmatrix}$$

2×4

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 6\\ 4 & 5 & 6 & 7\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 6\\ 4 & 5 & 6 & 7\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

可乘否？怎么乘？

（3）$\boldsymbol{A}$ 按列分块，$\boldsymbol{B}$ 每一个元素作为一块

$$AB=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20&26&32&38\\47&62&77&92\end{pmatrix}\ 2\times4$$

$$AB=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{c|c|c}1&2&3\\4&5&6\end{array}\right)\\ \alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\end{array}\left(\begin{array}{c:c:c:c}2&3&4&5\\\hline 3&4&5&6\\\hline 4&5&6&7\end{array}\right)=(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3)\left(\begin{array}{c:c:c:c}2&3&4&5\\\hline 3&4&5&6\\\hline 4&5&6&7\end{array}\right)$$

$$=(2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3\quad 3\alpha_1+4\alpha_2+5\alpha_3\quad 4\alpha_1+5\alpha_2+6\alpha_3\quad 5\alpha_1+6\alpha_2+7\alpha_3)$$

$$2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3=2\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times1+3\times2+4\times3\\2\times4+3\times5+4\times6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\47\end{pmatrix}$$

【重要结论1】AB的列向量是左边矩阵 A的列向量的线性组合，即AB的列向量可以用A的列向量线性表示.

（4）$\boldsymbol{A}$每一个元素作为一块，$\boldsymbol{B}$ 按行分块

$$AB=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20&26&32&38\\47&62&77&92\end{pmatrix}\quad 2\times 4$$

$$AB=\left(\begin{array}{c|c|c}1&2&3\\\hdashline 4&5&6\end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc}2&3&4&5\\\hline 3&4&5&6\\\hline 4&5&6&7\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c|c}1&2&3\\\hdashline 4&5&6\end{array}\right)\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1+2\beta_2+3\beta_3\\4\beta_1+5\beta_2+6\beta_3\end{pmatrix}$$

$$4\beta_1+5\beta_2+6\beta_3=4\begin{pmatrix}2&3&4&5\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}3&4&5&6\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}4&5&6&7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4\times2+5\times3+6\times4&4\times3+5\times4+6\times5&4\times4+5\times5+6\times6&4\times5+5\times6+6\times7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}47&62&77&92\end{pmatrix}$$

【重要结论2】AB的行向量是右边矩阵 B的行向量的线性组合，即AB的行向量可以用B的行向量线性表示.

分块矩阵的重要应用

利用分块矩阵分析 $A_{m\times n}B_{n\times s}=O_{m\times s}$ 的涵义.

$$A_{m\times n}B_{n\times s}=A_{m\times n}\begin{pmatrix}B_1 & B_2 & \cdots & B_s\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}AB_1 & AB_2 & \cdots & AB_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O & O & \cdots & O\end{pmatrix}_{m\times s}$$

$$\Rightarrow AB_j=O(j=1,2,\cdots,s)$$

矩阵 $B_{n\times s}$ 的列向量 $B_j(j=1,2,\cdots,s)$ 均是齐次线性方程组 $A_{m\times n}X_{n\times 1}=O_{m\times 1}$ 的解向量.

【重要结论3】AB=O $\Leftrightarrow$ B的列向量是齐次线性方程组AX=O的解向量.

推论 若$A_{m\times n}B_{n\times s}$=O, 且r(A)=r<n ,则r(B)≤n-r
即r(A)+ r(B)≤n

【重要结论4】 $r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}$

◆分块矩阵的转置

(4) 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，则 $A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$.

法则　将第i行块作为第i列块（i=1,2,…,s），并将每一块取转置.

例如：

$$A=\left(\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A^T=\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{pmatrix}$$

◆特殊的分块矩阵

(5) 设A为n阶矩阵,若A的分块矩阵只有在主对 角线上有非零子块,其余子块都为零矩阵,且非零子块都是方阵.即

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix},$$

[注]分块对角矩阵与其非零子块均为方阵!

其中 $A_i\ (i=1,2,\cdots s)$都是方阵,那么称 A为分块对角矩阵.（或准对角矩阵）

分块对角矩阵的重要性质 $$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|.$$

(证明提示: 利用Laplace定理.)

例如

$$A=\left(\begin{array}{cc|ccc|c}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\\hline 0&0&1&2&3&0\\0&0&2&3&1&0\\0&0&3&2&1&0\\\hline 0&0&0&0&0&4\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11}&0&0\\0&A_{22}&0\\0&0&A_{33}\end{pmatrix}$$

计算

$$|A|=|A_{11}||A_{22}||A_{33}|=-48$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_sB_s \end{pmatrix}.$$

[注] 同结构的对角分块矩阵的和、乘积仍是对角分块矩阵！

（6）形如 B 的方阵，即主对角线以下的子块均为零块，B_{ii}为方块的矩阵，称为上三角形分块矩阵.

(类似有下三角形分块矩阵)

$$B=\left(\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 0 & 5 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 5 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ 0 & B_{22} & B_{23} \\ 0 & 0 & B_{33} \end{pmatrix}$$

✓行列式等于主对角线上方块的行列式的乘积；

✓同结构的上（下）三角形分块矩阵的和、乘积仍是同结构的上（下）三角形分块矩阵.

【小结】

在矩阵理论的研究中, 矩阵的分块是一种最基本, 最重要的计算技巧与方法.

分块矩阵之间的运算

分块矩阵之间与一般矩阵之间的运算法则类似

(1) 加法 **同型矩阵,采用相同的分块法**

(2) 数乘 **数k乘矩阵A,需k乘A的每个子块**

(3) 乘法 若A左乘B,需A的列的划分与B的行的划分相一致!

(4) 转置

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$$

(5) 分块对角阵的行列式

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & O & \\ & & \ddots & \\ & O & & A_s \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|.$$

§2.4　逆矩阵

引言　在数的运算中，当数$a \neq 0$时，有

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1,$$

其中 $a^{-1} = \frac{1}{a}$为 a 的倒数　（或称 a的逆）；

一、逆矩阵的概念

定义1　对于n阶矩阵A，如果存在矩阵B，使得$AB=BA=E$，则称A为**可逆矩阵**，简称A**可逆**，称B为A的**逆矩阵**.

【注】1°　A、B 必为同阶方阵；

2°　若矩阵A可逆，则A的逆矩阵唯一，记作 A^{-1}

例1（1）
$$A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix},\quad a_i \neq 0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$
是否存在逆矩阵？

（2）单位阵E是否存在逆矩阵？ $E^{-1}=E$

【结论】若 $a_1a_2\cdots a_n \neq 0$，则对角矩阵A可逆,且
$$A^{-1}=\begin{pmatrix} a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^{-1} \end{pmatrix}$$

例2 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，求$A$的逆阵.

利用待定系数法 （此法较麻烦!）

解 设 $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是 A 的逆矩阵,

则 $AB=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -a & -b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+c=1, \\ 2b+d=0, \\ -a=0, \\ -b=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0, \\ b=-1, \\ c=1, \\ d=2. \end{cases}$$

又 $\overset{AB}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$

$$\overset{BA}{=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

二、矩阵可逆的充要条件及逆矩阵的求法

定义2 行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} A_{11} \\ A_{12} \\ \cdots \\ A_{1n} \end{matrix}} & \begin{matrix} A_{21} \\ A_{22} \\ \cdots \\ A_{2n} \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} A_{n1} \\ A_{n2} \\ \cdots \\ A_{nn} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的伴随矩阵。

【重要结论】$AA^* = A^*A = |A|E$.

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=|A|$$

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\ \ (i\neq j)$$

$$AA^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} |A| & & & O \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ O & & & |A| \end{pmatrix},$$

【重要结论】$AA^*=A^*A=|A|E$.

定理1 矩阵 A 可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{*},$$

其中 A^{*} 为矩阵 A 的伴随矩阵.

【注1】奇异矩阵与非奇异矩阵

当 $|A| = 0$ 时, A 称为奇异矩阵, 当 $|A| \neq 0$ 时, A 称为非奇异矩阵.

由此可得 A 是可逆阵的充要条件是 A 为非奇异矩阵.

【注2】定理1不仅给出了矩阵可逆的充要条件, 而且给出了求逆矩阵的方法(尽管不漂亮).

【推论1】设A, B都为n阶矩阵, 若 $AB = E$, 则A, B都可逆, 且 $B = A^{-1}, A = B^{-1}$.

说明　由推论1，验证矩阵B是矩阵A的逆矩阵，只需验证一个等式 $AB = E$或$BA = E$ 即可.

【推论2】n阶矩阵A可逆 $\Leftrightarrow r(A) = n$

【推论3】n阶矩阵A可逆 $\Leftrightarrow$ A^*可逆 .

【推论4】若n阶矩阵A可逆, 则 $A^* = |A| \cdot A^{-1}$

例3 判断矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$是否可逆，若可逆求其逆矩阵.

解 $\because\ |A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2\neq 0,\qquad \therefore\ A^{-1}$存在.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=2,\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}=-3,$$

同理可得 $A_{13}=2,\ A_{21}=6,\ A_{22}=-6,\ A_{23}=2,$

$A_{31}=-4,\ A_{32}=5,\ A_{33}=-2,$

得 $$A^{*}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

故

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

思考 **如何验证答案是否正确？** $AA^{-1}=E$

可逆矩阵的性质

(1) 若A可逆,则A^{-1}亦可逆,且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A.$

(2) 若A可逆,数$\lambda\neq 0$,则λA可逆,且$(\lambda A)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}A^{-1}.$

(3) 若A,B为同阶方阵且均可逆,则AB亦可逆,且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

推广 $(A_1A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$

思考:A,B为同阶方阵且均可逆,$A+B$是否一定可逆?

若$A+B$可逆,是否一定有$(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$?

例如

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$$

易知 A, B, $A+C$ 都可逆, 但

$$|A+B|=0,(A+C)^{-1}\neq A^{-1}+C^{-1}.$$

【注】当A可逆时，规定 $A^{-k}=\left(A^{-1}\right)^{k}$（$k$为正整数）.

(4) 若A可逆，则A^T亦可逆，且$\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$.

(5) 若A可逆，则有$\left|A^{-1}\right|=\left|A\right|^{-1}$.

例4 若A, B, C是同阶矩阵，且A可逆，证明下列结论成立.

(1) 若$AB=AC$，则$B=C$.

(2) 若$AB=O$，则$B=O$.

例5 设方阵A满足方程$A^2 - A - 2E = 0$,证明:$A, A+2E$都可逆,并求它们的逆矩阵.

证明 由$A^2 - A - 2E = 0$,

A^{-1}

得$A(A-E) = 2E \Rightarrow A\dfrac{A-E}{2} = E$ 故A可逆.

$\therefore A^{-1} = \dfrac{1}{2}(A-E)$. 又由$A^2 - A - 2E = 0$

$$\Rightarrow (A+2E)(A-3E) + 4E = 0$$

$$\Rightarrow (A+2E)\left[-\frac{1}{4}(A-3E)\right] = E$$ 故$A+2E$可逆.

且$(A+2E)^{-1} = -\dfrac{1}{4}(A-3E) = \dfrac{3E-A}{4}$.

例6 证明 $(E+AB)^{-1}A=(A^{-1}+B)^{-1}$

例7 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B$满足 $ABA^*=2BA^*+E$, 求$|B|$

答案：1/9

例8 设三阶矩阵A,B满足关系：

$$A^{-1}BA = 6A + BA, \text{且} A = \begin{pmatrix} 1/2 & & O \\ & 1/4 & \\ O & & 1/7 \end{pmatrix} \text{求} B.$$

解 $A^{-1}BA - BA = 6A$

$$\Rightarrow \left(A^{-1} - E\right)BA = 6A \Rightarrow \left(A^{-1} - E\right)B = 6E$$

$$\Rightarrow B = 6\left(A^{-1} - E\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例9 已知A, B和A+B均为可逆矩阵, 试证 $A^{-1} + B^{-1}$ 也可逆, 并求其逆矩阵.

例10 (1) A为n阶可逆阵, 求 $\left|A^*\right|$. $\left|A^*\right| = \left|A\right|^{n-1}$

(2) 若n阶阵A不可逆，求$\left|A^*\right|$. $\left|A^*\right| = 0$

例11 设A为n阶可逆矩阵, $\left|A\right| = a$, 则

(1) $\left|aA\right| = a^{n+1}$

(2) $\left|A^*\right| = a^{n-1}$

(3) $\left|aA^{-1}\right| = a^{n-1}$

(4) $\left|(aA)^{-1}\right| = \dfrac{1}{a^{n+1}}$

(5) $\left|A^{-1} + A^*\right| = \dfrac{(1+a)^n}{a}$

例12 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix},$

求矩阵X使满足 $AXB=C.$

解

$$\because |A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2\neq 0,\quad |B|=\begin{vmatrix}2&1\\5&3\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

$\therefore\ A^{-1}, B^{-1}$都存在.

且 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$,

又由 $AXB=C \Rightarrow A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}$

E

$\Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}.$ 于是 $X=A^{-1}CB^{-1}$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 10 & -4 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

【小结】

逆矩阵的概念及运算性质.

逆矩阵 A^{-1} 存在 $\Leftrightarrow |A| \neq 0.$

逆矩阵的计算方法

(1)待定系数法； (2)利用公式$A^{-1}=\dfrac{A^{*}}{|A|}$；

(3)初等变换法$($下次课介绍$)$.

思考题1

若A可逆,那么矩阵方程$AX = B$是否有唯一解 $X = A^{-1}B$? 矩阵方程 $YA = B$ 是否有唯一解 $Y = BA^{-1}$?

答 是的. 这是由于A^{-1}的唯一性决定的.

思考题2 设 $A=\begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$,其中$B$和$C$都是可逆方阵,

证明A可逆,并求A^{-1}.

证 由B,C可逆,有$|A|=|B||C|\neq 0$,得A可逆.

设 $A^{-1}=\begin{pmatrix} X & Z \\ W & Y \end{pmatrix}$,则$\begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Z \\ W & Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} BX+DW=E, \\ BZ+DY=O, \\ CW=O, \\ CY=E. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=B^{-1}, \\ Y=C^{-1}, \\ Z=-B^{-1}DC^{-1}, \\ W=O. \end{cases}$$

因此 $A^{-1}=\begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$.

特别地, 若 A,B都可逆, 则有

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$$

一般地,若 $A_i\ (i=1,2,\cdots s)$ 都可逆, 则H也可逆, 且

$$H = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix} \quad H^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

思考题3 设n阶矩阵A及s阶矩阵B都可逆，求$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}$

解 将 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}$分块为$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$

则 $\begin{pmatrix} O & A_{n\times n} \\ B_{s\times s} & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} = E = \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_s \end{pmatrix}$

由此得到 $\begin{cases} AC_3 = E_n \Rightarrow C_3 = A^{-1} \\ AC_4 = O \Rightarrow C_4 = O \quad (A^{-1}\text{存在}) \\ BC_1 = O \Rightarrow C_1 = O \quad (B^{-1}\text{存在}) \\ BC_2 = E_s \Rightarrow C_2 = B^{-1} \end{cases}$

$$\therefore \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$$

一般地,若$A_i\ (i=1,2,\cdots s)$ 都可逆, 则H也可逆, 且

$$H=\begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_s & & & \end{pmatrix} \quad H^{-1}=\begin{pmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & \iddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$$

§2.5 初等矩阵

引例　线性方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，记作 $AX = B$

$$(A\ B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

又 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ 可逆，$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，则有

$$A^{-1}A\,X = A^{-1}B, \quad E\,X = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

思考　矩阵的初等变换与矩阵乘法有何关系？

初等矩阵的概念及性质

1. 定义　由单位矩阵E经过一次初等行(列)变换得到的方阵称为初等矩阵.

三种初等变换对应着三种初等方阵.

$$\begin{cases}\textbf{1. 对调两行或两列;}\\ \textbf{2. 以数 } \boldsymbol{k \neq 0} \textbf{ 乘某行或某列;}\\ \textbf{3. 以数 } \boldsymbol{k} \textbf{ 乘某行（列）加到另一行（列）上去.}\end{cases}$$

1、对调两行或两列

对调E的第 i，j 两行或第 i，j两列，得到初等矩阵$E(i,j)$

$$
E(i,j)=\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
 \\ \\ \\ \leftarrow 第\, i\, 行 \\ \\ \\ \\ \leftarrow 第\, j\, 行 \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
\uparrow & \uparrow \\
第i列 & 第j列
\end{array}
$$

2、以数 $k \neq 0$ 乘某行或某列

以数$k\neq 0$乘单位矩阵E的第i行（列），得到初等矩阵$E(i(k))$

$$
E(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}
$$

$\uparrow$

第 i 列

3、以数$k \neq 0$乘某行(列)加到另一行(列)上去

以 k 乘 E 的第 j 行加到第 i 行上，或以 k 乘 E 的第 i 列加到第 j 列上，得到初等矩阵$E(i, j(k))$

$$E(i,\ j(k)) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第}i\text{行} \\ \\ \leftarrow \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \text{第}i\text{列} & & \text{第}j\text{列} \end{array} & \end{array}$$

例1 判断如下矩阵是否为初等矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

是

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

不是

2. 初等矩阵的性质

（1）初等矩阵转置仍为初等矩阵

$$
E(i,j)=\begin{array}{c@{}c}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 0 & & 1 & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & 1 & & 0 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} \quad & \quad & i & \quad & j & \quad & \quad \end{array} &
\end{array}
$$

$$\boxed{E(i,j)^T=E(i,j)}$$

$$
E(i(k))=\begin{array}{c@{}c}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & \\
& \ddots & & & & \\
& & k & & 0 & \\
& & & \ddots & & \\
& & & & 1 & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} \quad & \quad & i & \quad & j & \quad & \quad \end{array} &
\end{array}
$$

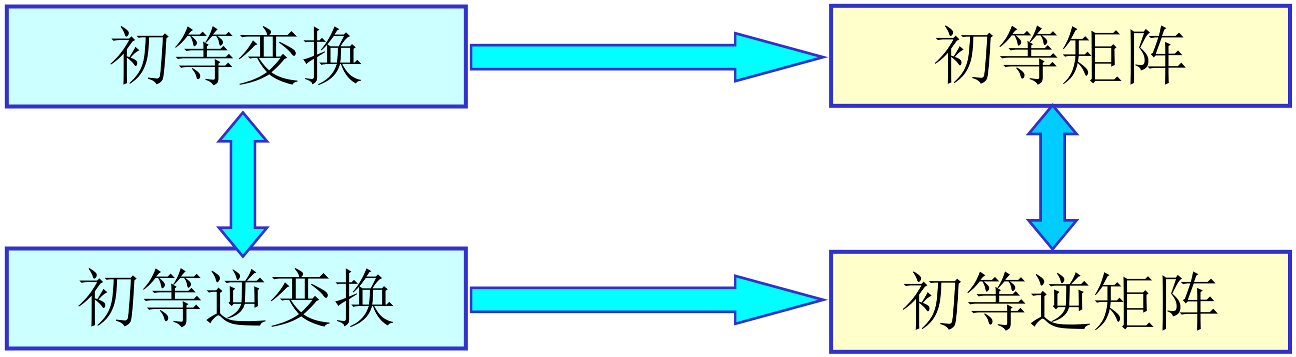
$$\boxed{E(i(k))^T=E(i(k))}$$

$$
E(i,j(k))=\begin{array}{c@{}c}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & & k & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & 0 & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} \quad & \quad & i & \quad & j & \quad & \quad \end{array} &
\end{array}
$$

$$
E(i,j(k))^T=\begin{array}{c@{}c}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & & 0 & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & k & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} \quad & \quad & i & \quad & j & \quad & \quad \end{array} &
\end{array}
$$

$$\boxed{E(i,j(k))^T=E(j,i(k))}$$

（2）初等矩阵都可逆 ，且其逆矩阵仍为初等矩阵



初等变换的逆变换仍为初等变换，且变换类型相同.

$r_i \leftrightarrow r_j$ 逆变换 $r_i \leftrightarrow r_j$; $\qquad E(i,j)^{-1} = E(i,j)$

$r_i \times k$ 逆变换 $r_i \times (\frac{1}{k})$; $\qquad E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$

$r_i + kr_j$ 逆变换 $r_i + (-k)r_j$. $\qquad E(i,j(k))^{-1} = E(i,j(-k))$

例2 计算

$$(1)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&\cdots&a_{3n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ka_{21}&ka_{22}&\cdots&ka_{2n}\\a_{31}&a_{32}&\cdots&a_{3n}\end{pmatrix}$$

$$(2)\begin{pmatrix}1&0&k\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+ka_{31}&a_{12}+ka_{32}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}$$

$$(3)\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{13}&b_{12}\\b_{21}&b_{23}&b_{22}\\b_{31}&b_{33}&b_{32}\end{pmatrix}$$

初等变换与初等矩阵的关系

定理1 设A为$m\times n$阶矩阵，则

（1）对A施以一次初等行变换，相当于用同种m阶初等矩阵左乘矩阵A;

（2）对A施以一次初等列变换，相当于用同种n阶初等矩阵右乘矩阵A.

证明 $A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix}$ 则有 $\boldsymbol{\varepsilon_i A_{m\times n} = A_i}$

A_i为A的第i行的行向量.

$$E(i,j(k))=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_i+k\varepsilon_j \\ \vdots \\ \varepsilon_j \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix}$$

$$E(i,j(k))A=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_i+k\varepsilon_j \\ \vdots \\ \varepsilon_j \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix}A=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 A \\ \vdots \\ (\varepsilon_i+k\varepsilon_j)A \\ \vdots \\ \varepsilon_j A \\ \vdots \\ \varepsilon_m A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i+kA_j \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

一般记法

$E(i,j)A$表示A的第i行与第j行对换,

$AE(i,j)$表示A的第i列与第j列对换.

$E(i(k))A$表示A的第i行乘k,

$AE(i(k))$表示A的第i列乘k.

$E(ij(k))A$表示A的第j行乘k加到第i行上,

$AE(ij(k))$表示A的第i列乘k加到第j列上.

例3 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}+a_{31} & a_{12}+a_{32} & a_{13}+a_{33} \end{pmatrix}$$

$$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 则（ C ）成立.

A. $AP_1P_2=B$　　B. $AP_2P_1=B$

C. $P_1P_2A=B$　　D. $P_2P_1A=B$

例4　(1) 设初等矩阵

$$P_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} P_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\c&0&0&1\end{pmatrix} P_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&k&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

求 $P_1P_2P_3$ 及 $(P_1P_2P_3)^{-1}$

解　(1) $P_1P_2P_3$

$$=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\c&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\c&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&k&0&0\\1&0&0&0\\c&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$P_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad P_2=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\c&&&1\end{pmatrix}\quad P_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

$$(P_1P_2P_3)^{-1}=P_3^{-1}P_2^{-1}P_1^{-1}$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1/k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -c & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1/k & & \\ & & 1 & \\ -c & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix}
$$

(2)已知：$A = P_1 B P_2$，求A

其中$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

定理2　设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的秩为r，则存在m阶初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_s$ 和n阶初等矩阵 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_t$ 使得

$$P_sP_{s-1}\cdots P_1AQ_1Q_2\cdots Q_t=\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

A的等价标准型

推论　若n阶矩阵A可逆, 则其等价标准型为同阶单位矩阵E, 即可逆矩阵A可经过若干次初等变换化为单位矩阵.

定理3　n阶矩阵A可逆的充分必要条件是A可以表示成一系列初等矩阵的乘积.

利用初等变换求逆矩阵、解矩阵方程

1. 求逆矩阵

◆初等行变换求逆矩阵

当$|A| \neq 0$时，由 $A = P_1 P_2 \cdots P_l$，有

$$P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} A = E, \quad \text{及} \quad P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} E = A^{-1},$$

$$\therefore \quad P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} (A \,\vdots\, E)$$

保证A，E作相同的初等行变换

$$= \left(P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} A \,\vdots\, P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} E\right) = \left(E \,\vdots\, A^{-1}\right)$$

即 $$\boxed{(A \,\vdots\, E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \,\vdots\, A^{-1})}$$

例5　求 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -5 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

【注】

1. 求逆时, 若用初等行变换必须坚持始终, 不能夹杂任何列变换.

2. 如果不知矩阵A是否可逆，也可按上述方法，只要$n\times 2n$矩阵的左边子块有一行(列)的元素全为0，则$r(A)$的行列式等于0, 故A不可逆.

◆初等列变换求逆矩阵

由$|A| \neq 0$，$A^{-1} = Q_1Q_2\cdots Q_t$，有

$$AA^{-1} = AQ_1Q_2\cdots Q_t = E, \quad EQ_1Q_2\cdots Q_t = A^{-1}$$

即 $$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

保证A，E作相同的初等列变换

例5　求 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

2. 解矩阵方程

① $AX = B$ 若矩阵A可逆，则 $X = A^{-1}B$

$$\because \quad A^{-1}(A \,\vdots\, B) = (E \,\vdots\, A^{-1}B)$$

即

$$\boxed{(A \,\vdots\, B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \,\vdots\, A^{-1}B)}$$

例6　求矩阵 X，使 $AX = B$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

方法1　先求出 A^{-1}，再计算 $A^{-1}B$.

方法2　利用初等行变换直接求 $A^{-1}B$.

解　若 A 可逆，则 $X = A^{-1}B$.

$$(A \vdots B) = \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & -12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - r_2]{r_1 + r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2 - 5r_3]{r_1 - 2r_3}\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \div (-1)]{r_2 \div (-2)}\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right), \quad \therefore \; X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

② $XA = B$　若矩阵A可逆, 则 $X = BA^{-1}$

$$\because \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix}$$

③ $AXB=C$ 若A，B可逆, 则$X=A^{-1}CB^{-1}$

$$A^{-1}AXB=A^{-1}C,\qquad XB=A^{-1}C$$

$$XBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1},\qquad X=A^{-1}CB^{-1}$$

具体求法:

$$\begin{pmatrix} A & C \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E & A^{-1}C \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} B \\ A^{-1}C \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E \\ A^{-1}CB^{-1} \end{pmatrix}$$

【注】也可先求出A, B的逆矩阵, 然后做矩阵乘法求出X.

例7 解矩阵方程 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$

答案 $X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

【小结】

1. 单位矩阵 $\xrightarrow{\text{一次初等变换}}$ 初等矩阵.

2. 利用初等变换求逆阵的步骤:

(1) 构造矩阵 $(A \vdots E)$ 或 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$;

(2) 对 $(A \vdots E)$ 施行初等行变换, 将 A 化为单位矩阵 E 后, 右边 E 对应部分即为 A^{-1} (或对 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$ 施行初等列变换, 将 A 划为单位阵 E 后, E 对应部分即为 A^{-1}.

思考题 1

将矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$表示成有限个初等方阵的乘积.

解法 1　A可以看成是由3阶单位矩阵E经4次初等变换,

$$r_2\leftrightarrow r_3,\quad c_1+2c_3,\quad (-1)r_3,\quad (-1)c_3$$

而得. 而这4次初等变换所对应的初等方阵为:

$$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix},\ P_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

$$P_4=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

由初等方阵的性质得

$$A=P_3P_1EP_2P_4=P_3P_1P_2P_4.$$

解法 2　A可逆，所以存在初等矩阵 $p_1 p_2 \cdots p_s$，

使得 $P_s \cdots P_2 P_1 A = E \quad \therefore A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \div (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \div (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&&1\\&1&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\-2&1&\\&&1\end{pmatrix}A=E$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}1&&\\-2&1&\\&&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&&\\&&1\\&1&\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&&\\2&1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&&1\\&1&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$$

补充题目

将矩阵A表示成三个初等矩阵的乘积. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

解 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

$$\therefore\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}A=E$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

思考题 2

已知 n 方阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$,

求 A 中所有元素的代数余子式之和 $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}$.

解 $\because \quad |A| = 2 \neq 0, \quad \therefore \quad A$ 可逆.

且 $A^* = |A| A^{-1}$.

$$
(A \mid E)=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\longrightarrow\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\because \quad A^* = 2A^{-1}$$

故 $$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} = 2[\frac{1}{2} + (n-1) - (n-1)] = 1.$$