第1章　函数 极限 连续

- §1.1 函数概念
- §1.2 常用经济函数
- §1.3 极限概念
- §1.4 极限的运算
- §1.5 无穷小量与无穷大量
- §1.6 函数连续

上页　下页　返回

§1.1 函数概念

1.1.1 函数的概念

1. 常量与变量:

在某过程中数值保持不变的量称为常量,而数值变化的量称为变量.

通常用字母a, b, c等表示常量,

用字母x, y, t等表示变量.

变量的取值范围称为变域。若为区间，则变量是连续变量，否则为离散变量.

如：物理中自由落体的距离s与时间t的关系为$s=\frac{1}{2}gt^2$,

其中变量t的取值为$(0,T_0)$,T_0为某个实数,t为连续变量,

$g=9.8m/s^2$，是重力加速度,是常量.

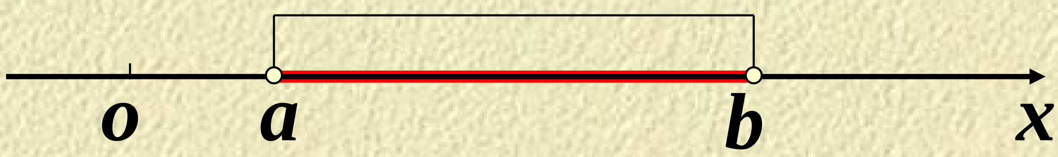
上页 下页 返回

2. 区间与邻域

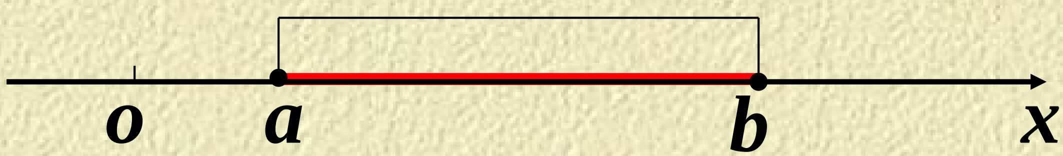
（1）区间

$\forall\, a,b \in R$,且$a < b$.

$\{x | a < x < b\}$ 称为开区间，记作 (a,b)



$\{x | a \le x \le b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$



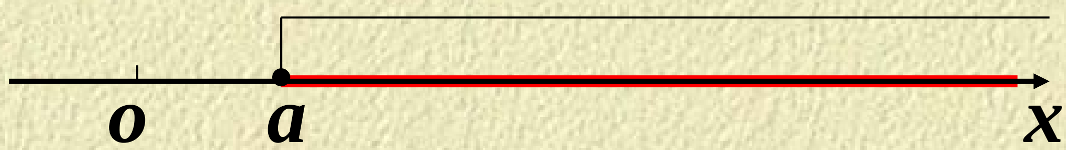
$\{x \mid a \le x < b\}$ 称为半开区间，记作 $[a,b)$

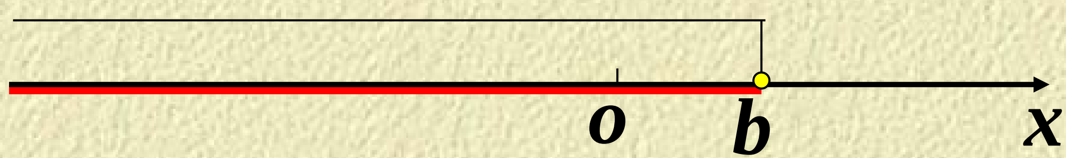
$\{x \mid a < x \le b\}$ 称为半开区间，记作 $(a,b]$

有限区间

$[a,+\infty) = \{x \mid a \le x\}$　　$(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$

无限区间





有限区间长度的定义:

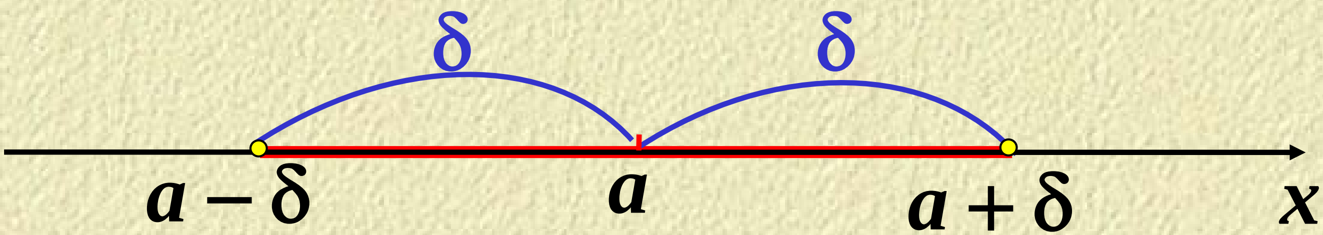
两端点间的距离(线段的长度)称为有限区间的长度.

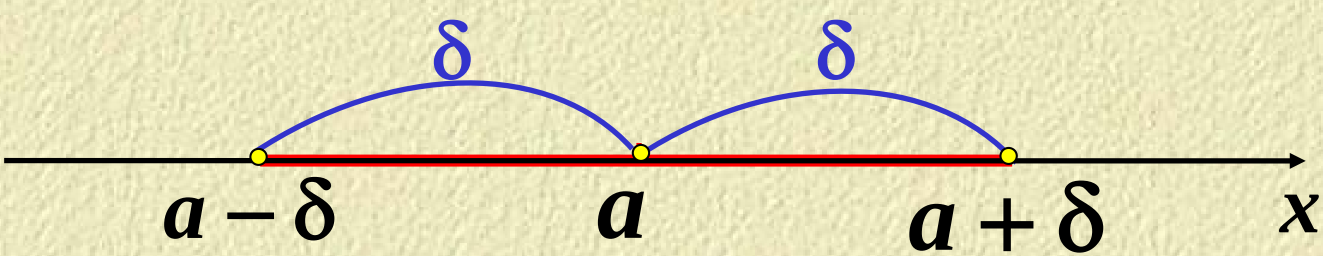
(2) 邻域: 设a与δ是两个实数，且$\delta > 0.$

数集$\{x \mid |x-a| < \delta\}$称为点$a$的$\delta$邻域，

点a称为该邻域的中心，δ称为该邻域的半径．

$$O_\delta(a) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\} = (a-\delta, a+\delta).$$





点a的δ去心邻域，记作$O_\delta(a)\setminus\{a\}$.

$$0_\delta(a)\setminus\{a\}=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$$

$$=\underbrace{(a-\delta,a)}_{a\text{的左邻域}}\bigcup\underbrace{(a,a+\delta)}_{a\text{的右邻域}}$$

有的书用如下记号:

$$\underline{U(a,\delta)}=(a-\delta,a+\delta);$$

$$\underline{\mathring{U}(a,\delta)}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta);$$

上页 下页 返回

3. 函数概念:

定义1.2 设有两个变量x与y，D是一给定的非空实数集合. 如果存在一个确定的法则(对应法则) f,使得对每一个$x \in D$，都有唯一的一个实数y与之对应，则称这个对应法则f为定义在实数集合D上的一个一元函数，简称为函数.D称为f的定义域,记为$D(f)$.

$$y = f(x)$$

因变量

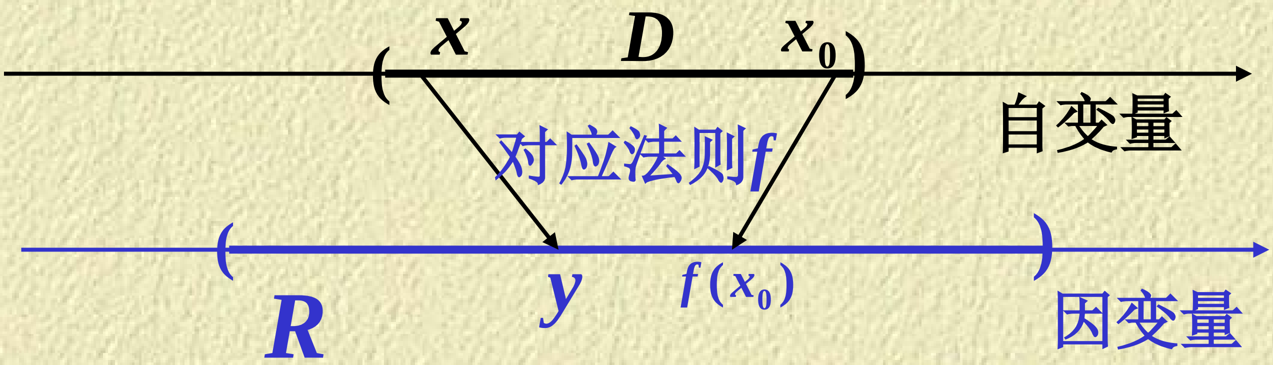
自变量

当$x_0 \in D$时,称$y_0 = f(x_0)$为函数在点x_0处的函数值,也可记为$y|_{x=x_0}$.

函数值全体组成的数集

$R(f) = \{y | y = f(x), x \in D(f)\}$ 称为函数的值域.

函数的两要素：定义域与对应法则.



约定：定义域是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值，在实际背景的函数中的按实际意义确定.

例如，$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$D:(-1,1)$

两个函数相同 $\Leftrightarrow$ 定义域和对应法则均相同

$y=\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$ 与 $y=x-1$ 不同

4. 函数表示法：解析法、表格法和图形法

例1 求函数 $y = \sqrt{16 - x^2} + \lg \sin x$ 的定义域.

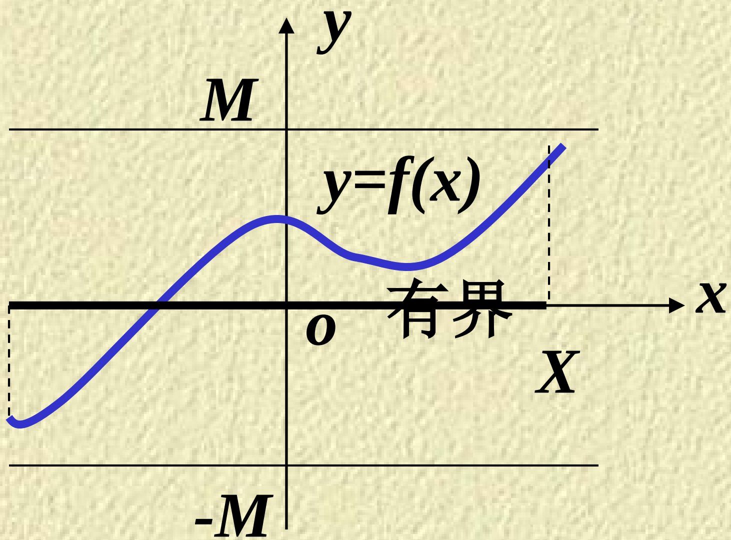
上页 下页 返回

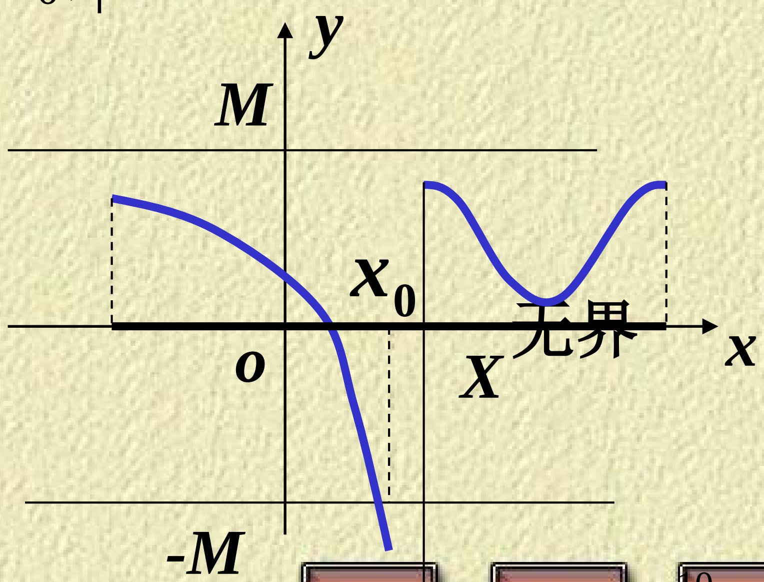
1.1.2 函数的几特性

1. 函数的有界性:

若$X \subset D, \exists M > 0, \forall x \in X$,有 $|f(x)| \le M$ 成立,则称函数$f(x)$在X上有界.否则称无界,

若$\forall M \succ 0, \exists x_0 \in X$,有$|f(x_0)| \succ M$.





上页 下页 返回

定义：设函数$f(x)$在集合D内有定义，若存在数$A(B)$，使得对每一个$x \in D$，都有$f(x) \le A$(或$f(x) \ge B$)成立，则称函数$f(x)$在D内有上界(或有下界)，也称$f(x)$是D内有上界(或有下界)的函数.

例：$f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在(0, 1)内没有上界

函数在D上有界 $\Leftrightarrow$ 函数在D上有上、下界

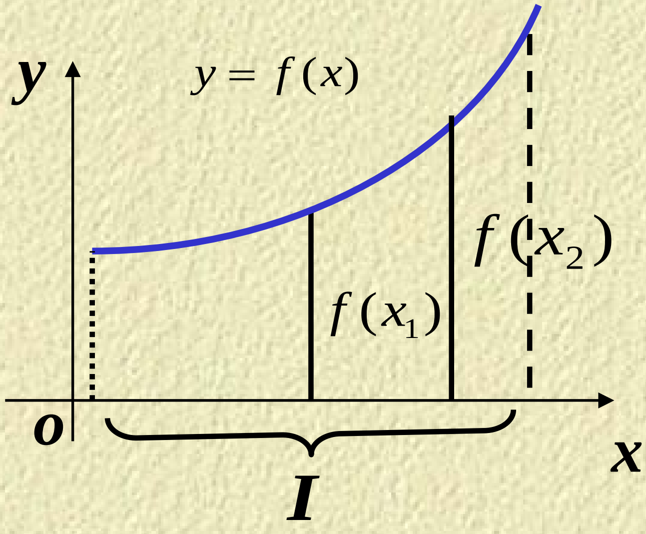
2. 函数的单调性:

设函数 $f(x)$的定义域为D, 区间$I \subset D$,

如果对于区间 I 上任意两点 x_1及 x_2, 当$x_1 < x_2$时,

恒有 (1) $f(x_1) \le f(x_2)$($f(x_1) < f(x_2)$),

则称函数 $f(x)$在区间 I上是单调增加(严格增加)的;



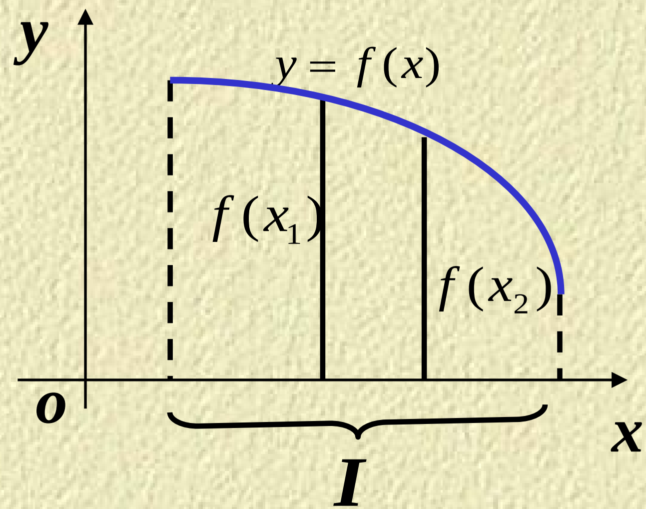
设函数 $f(x)$的定义域为D, 区间$I \subset D$,

如果对于区间 I 上任意两点 x_1及 x_2, 当$x_1 < x_2$时,

恒有 (2) $f(x_1) \geq f(x_2)$($f(x_1) > f(x_2)$),

则称函数 $f(x)$在区间 I上是单调减少(严格减少)的;

单调增加和单调减少函数统称为单调函数.



上页 下页 返回

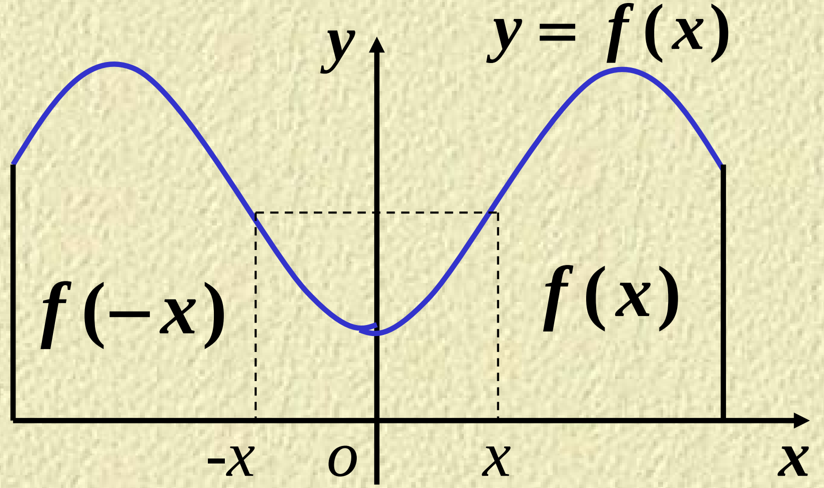
注：讨论函数单调性时，必须在某个区间上讨论，若题目未给出区间，指在定义域内的单调性.

例2 讨论$y = 2x^2 + 1$的单调性.

3. 函数的奇偶性:

设D关于原点对称，对于$\forall x \in D$，有

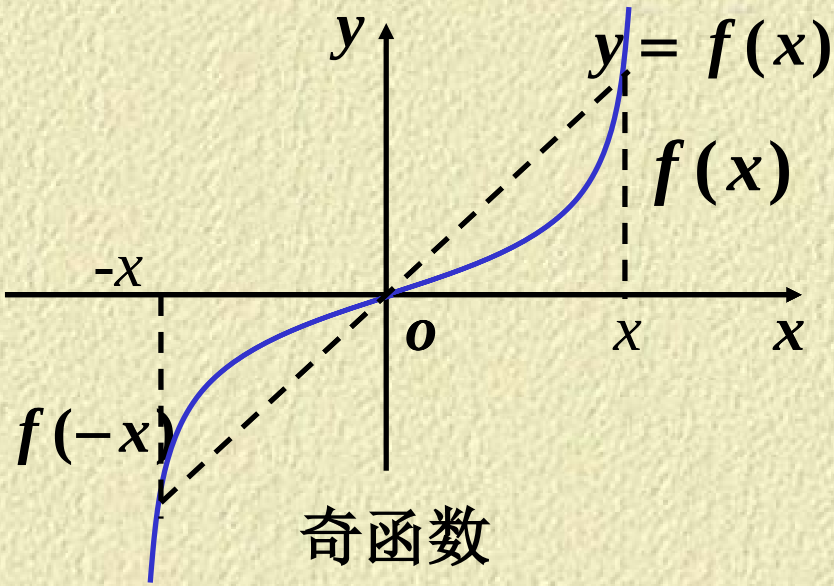
$f(-x) = f(x)$ 称 $f(x)$为偶函数;



偶函数

设D关于原点对称，对于$\forall x \in D$, 有

$f(-x) = -f(x)$　称 $f(x)$为奇函数；



奇函数

上页　下页　返回

注：判断函数奇偶性的方法：

1、定义；

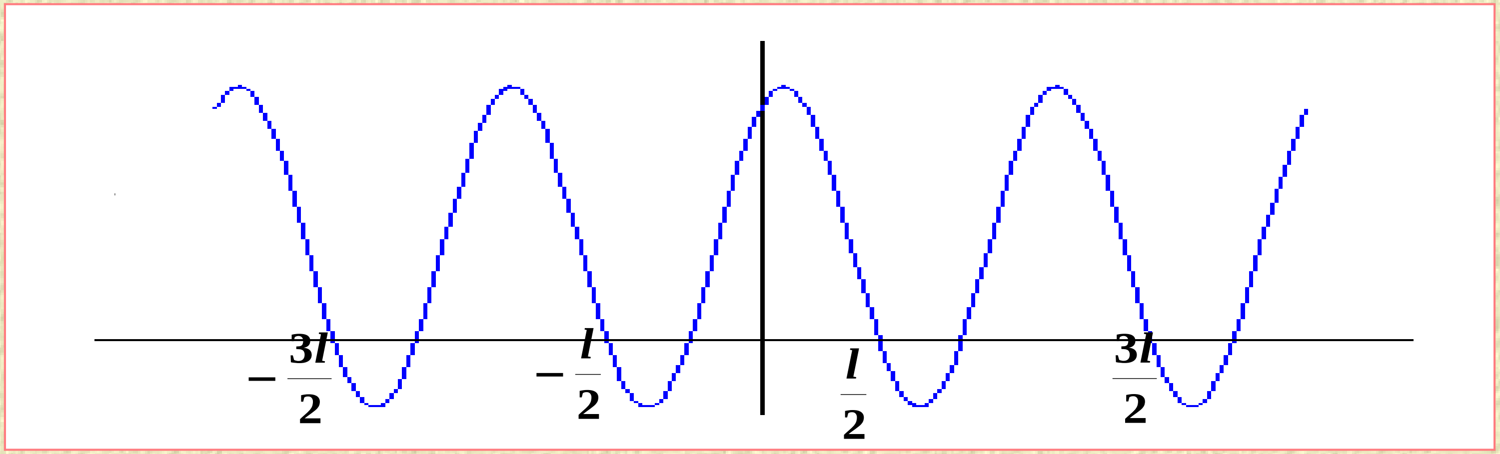
2、若定义中的D不关于原点对称，则无奇偶性可言.

例4 讨论函数$g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$的奇偶性.

上页 下页 返回

4. 函数的周期性:

设函数$f(x)$在集合D内有定义，如果存在非零常数T，使得对任意的$x\in D$，恒有$x+T\in D$，且$f(x+T)=f(x)$成立，则称$f(x)$为周期函数，满足上式的最小正数T_0，称为$f(x)$的基本周期，简称周期.

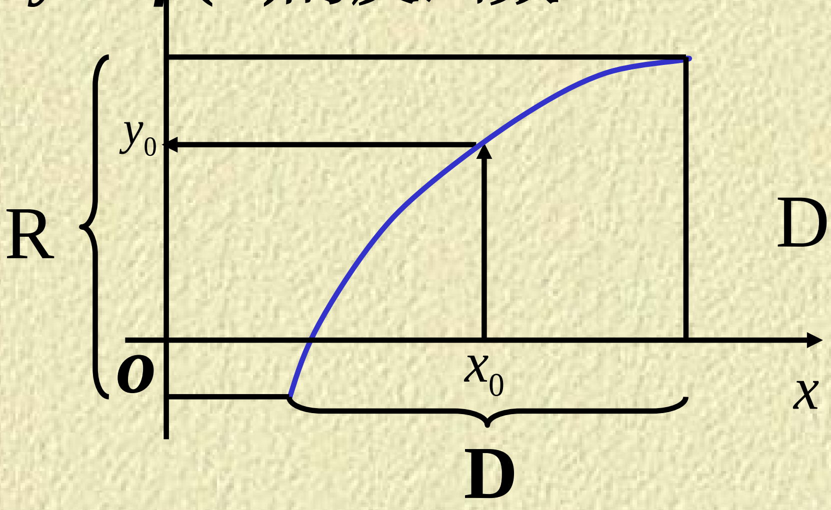


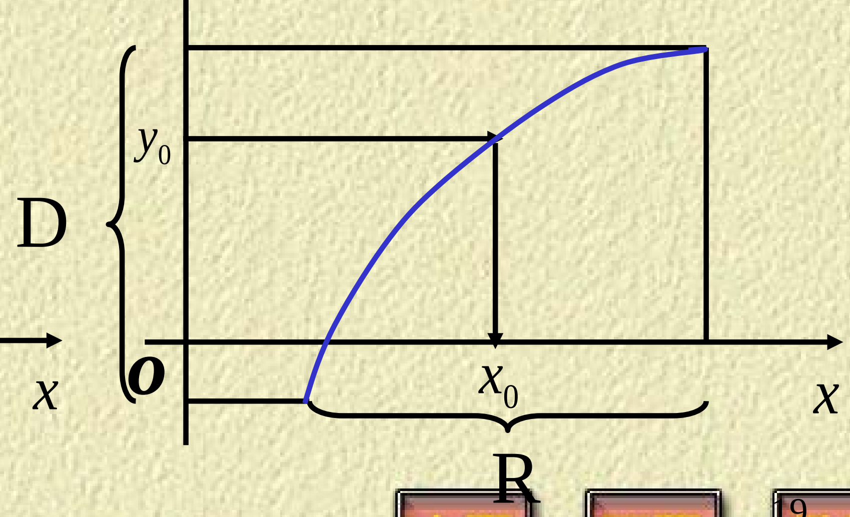
$f(x)=C$,无基本周期的周期函数；$f(x)=\sin x, x\in(-\infty,+\infty)$周期为$2\pi$.

1.1.3 初等函数

1、反函数

定义：设函数$y=f(x)$的定义域是D值域是R，如果对每一个$y\in R$，都有唯一确定的$x\in D$与之对应且满足$y=f(x)$，则x是定义在R上的以y为自变量的函数，记为$x=f^{-1}(y)$，$y\in R$，并称其为函数$f(x)$的反函数，因习惯原因，一般 用$y=f^{-1}(x)$表示$y=f(x)$的反函数.





例5：求$y = 3x - 1$的反函数.

上页 下页 返回

2. 复合函数

设 $y=\sqrt{u}$, $u=1-x^2$, $\longrightarrow$ $y=\sqrt{1-x^2}$

定义：设函数 $y=f(u)$ 的定义域 $D(f)$，而函数 $u=g(x)$ 的值域为 $R(g)$，若 $D(f)\cap R(g)\neq\varnothing$，则称函数 $y=f[g(x)]$, $x\in\{x|g(x)\in D(f)\}$，为 x 的<u>复合函数.</u>

$x\leftarrow$自变量, $u\leftarrow$中间变量, $y\leftarrow$因变量,

注意: 1.不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的;

例如 $y=\sqrt{u}$, $u=-1-x^2$; $y \neq \sqrt{-1-x^2}$

2.复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成.

例如 $y=\sqrt{\tan\frac{x}{2}}$,

$y=\sqrt{u}$, $u=\tan v$, $v=\frac{x}{2}$.

3. 基本初等函数

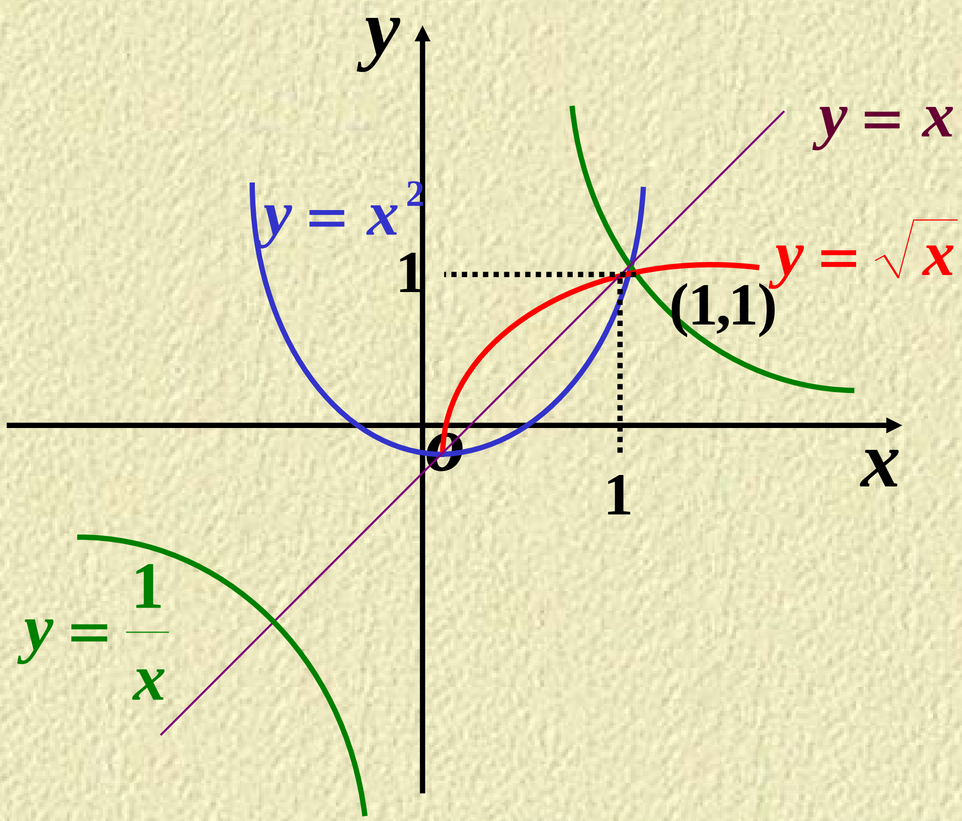
1）、常数函数

$y = C, C$为常数，

定义域为$(-\infty, +\infty)$

2）、幂函数

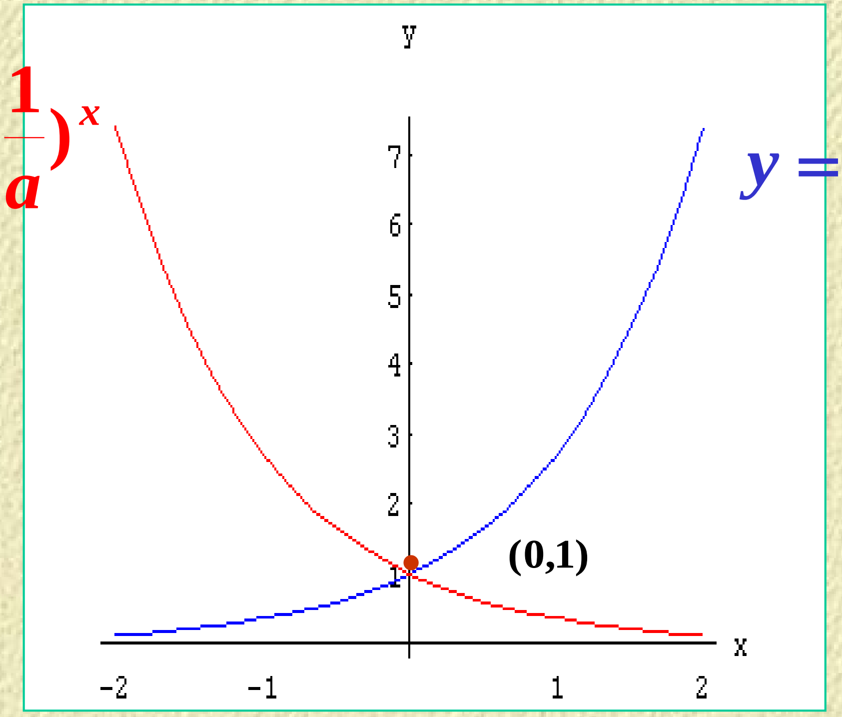
$y = x^{\mu}$　(μ是常数)



3）、指数函数

$$y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1) \quad y = e^x \quad e = 2.71828\cdots$$

$y = (\frac{1}{a})^x$



$y = a^x$

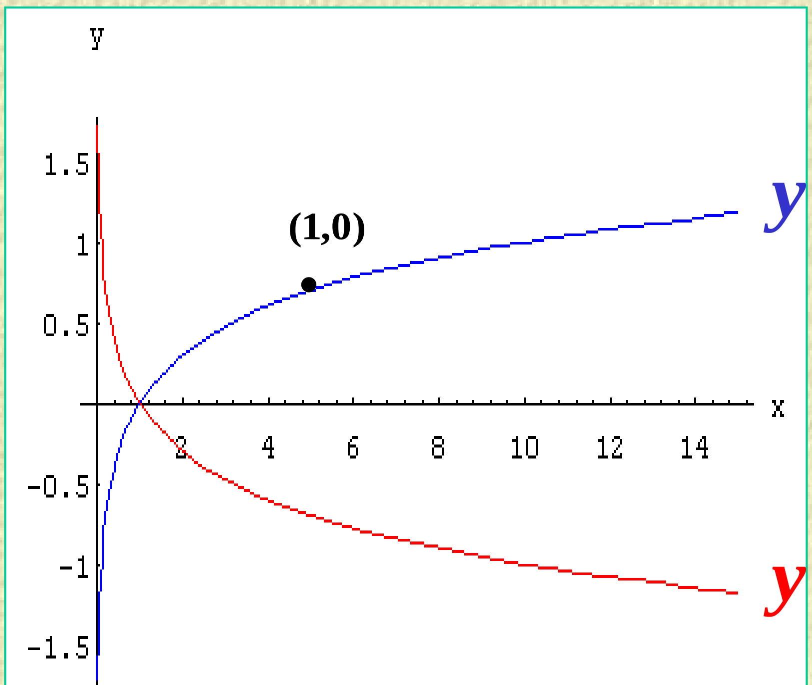
$(a > 1)$

4)、对数函数

$$y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$y = \log_e^x = \ln x$：自然对数

$y = \log_{10}^x = \lg x$：常用对数



$y = \log_a x$

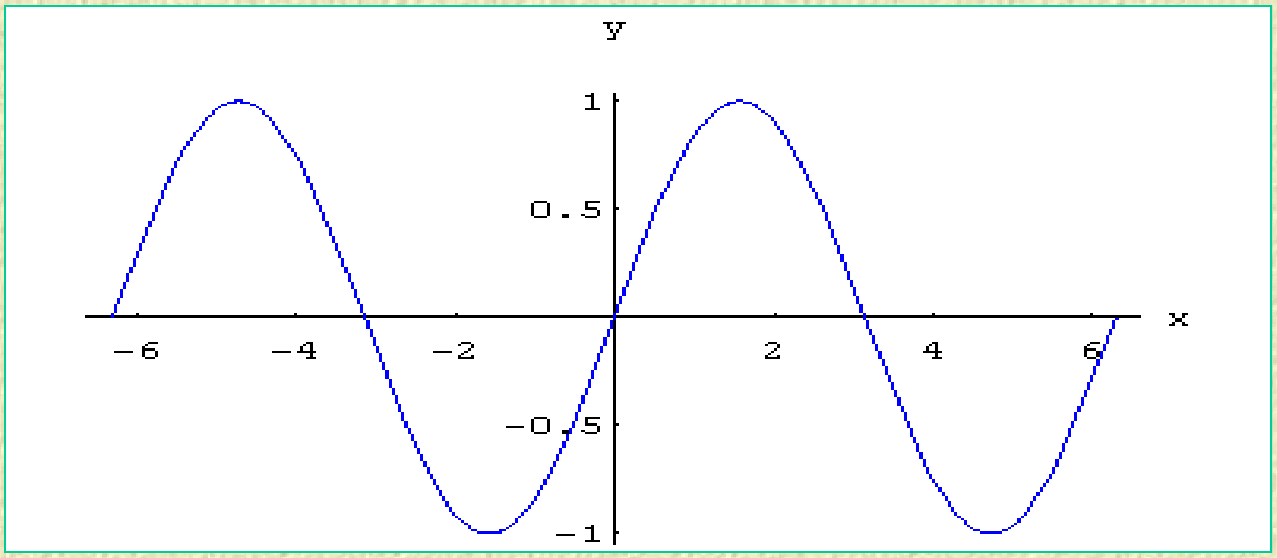
$(a > 1)$

$y = \log_{\frac{1}{a}} x$

5)、三角函数

正弦函数 $y = \sin x$

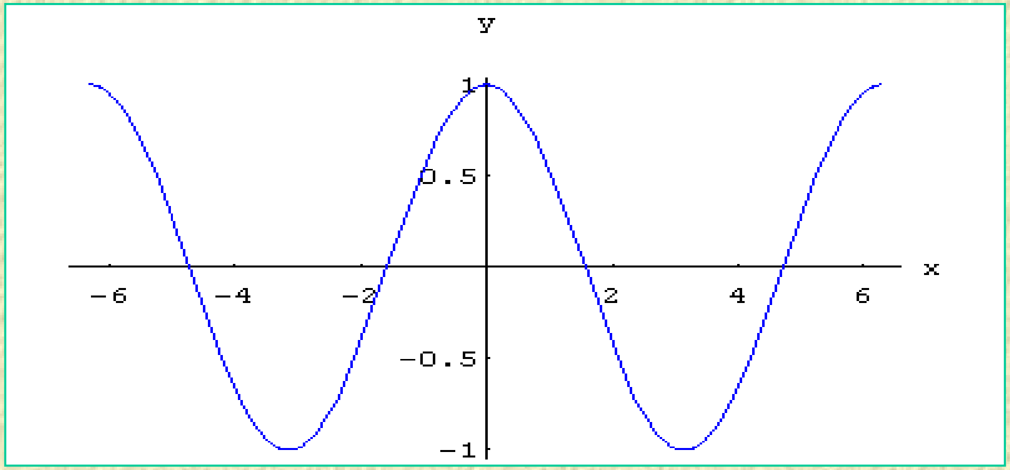
$$360^\circ = 2\pi\text{弧度} \Rightarrow 1^\circ = \frac{\pi}{180}\text{弧度}$$



$y = \sin x$

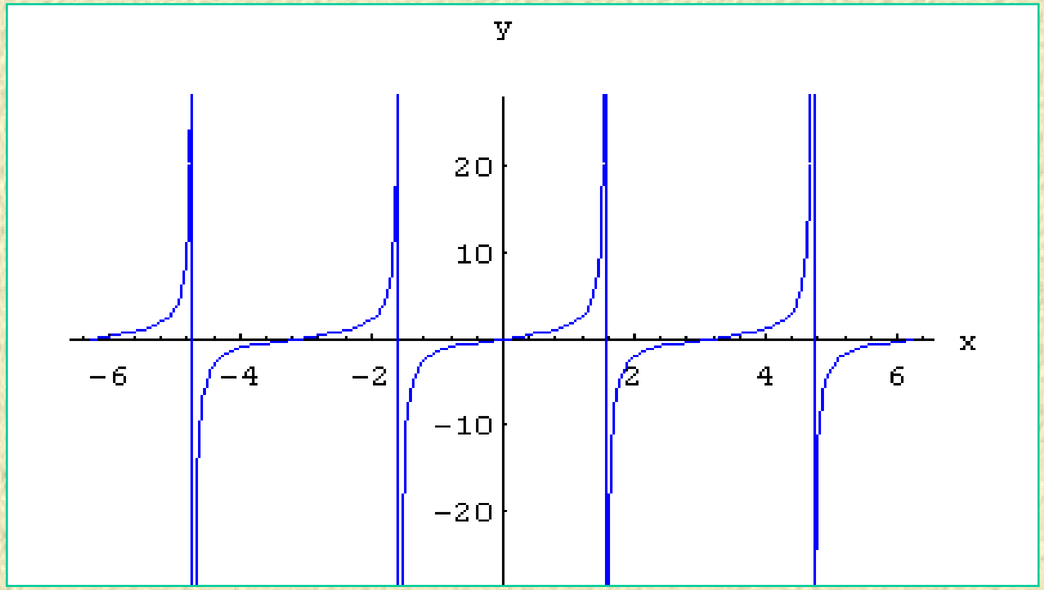
上页 下页 返回

余弦函数 $y = \cos x$



$y = \cos x$

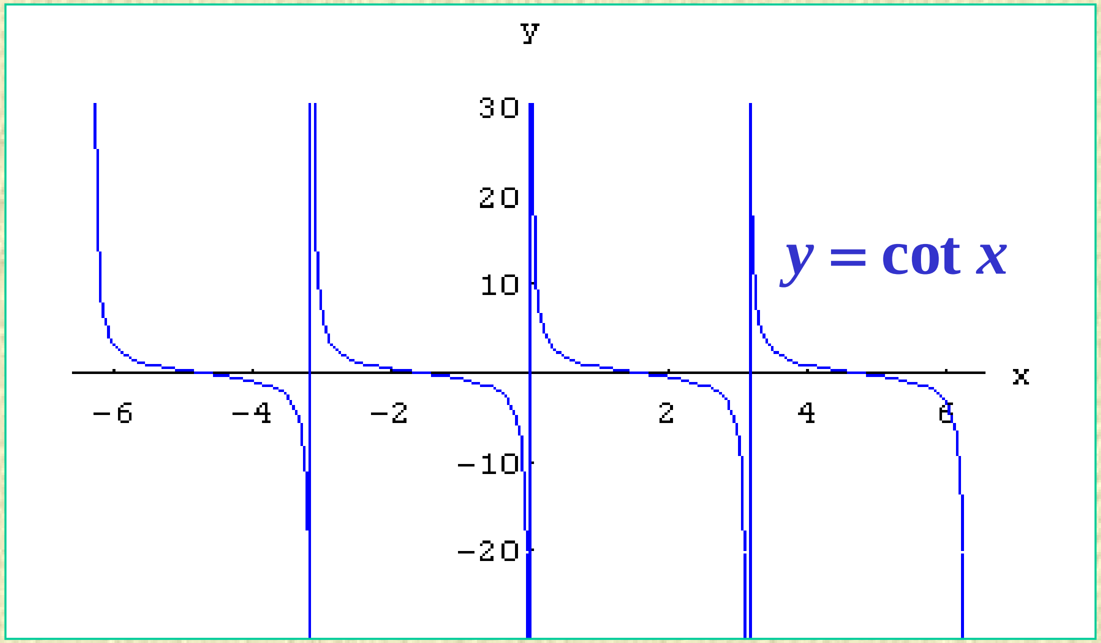
正切函数 $y = \tan x$



$y = \tan x$

上页 下页 返回

余切函数 $y = \cot x$

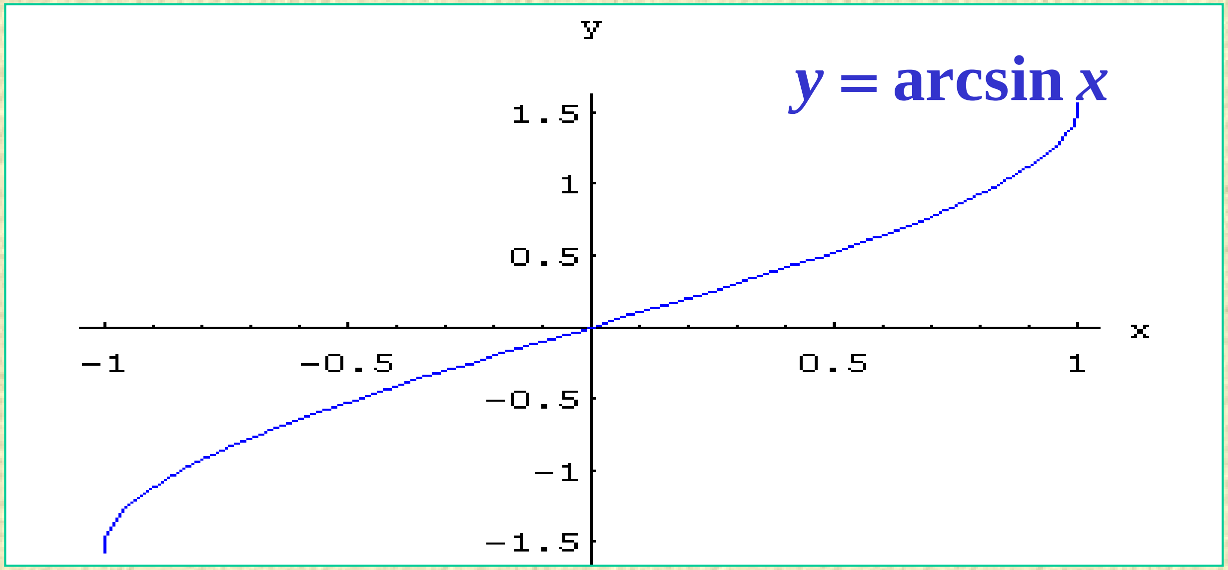


上页 下页 返回

6、反三角函数

反正弦函数 $y=\arcsin x$

定义域: $[-1,1]$ 主值分支 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

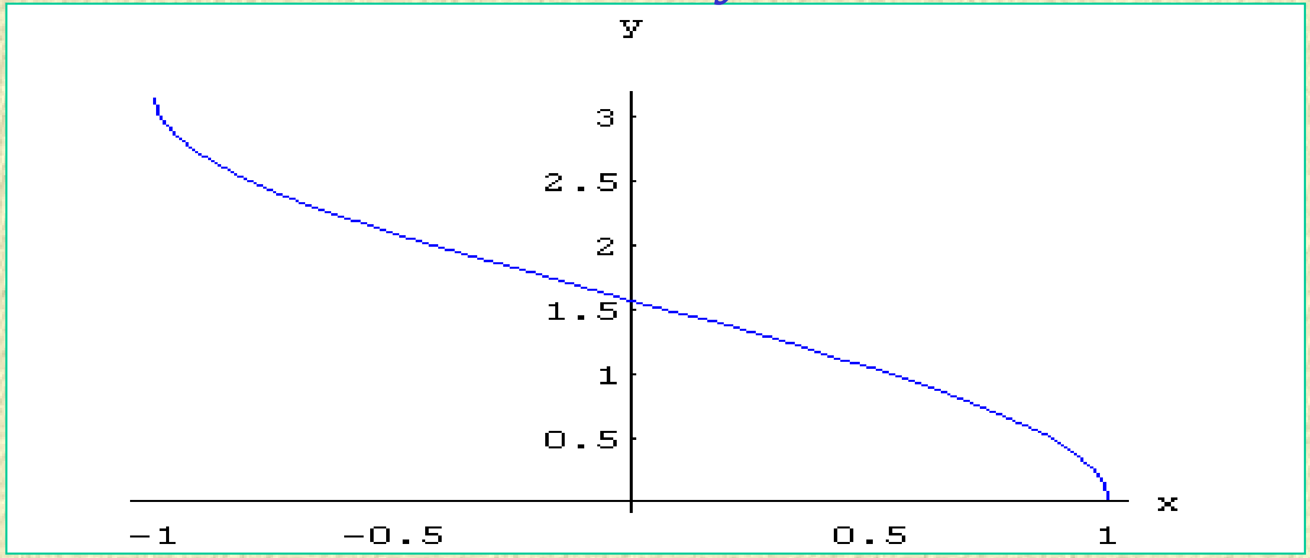


上页 下页 返回

反余弦函数 $y=\arccos x$

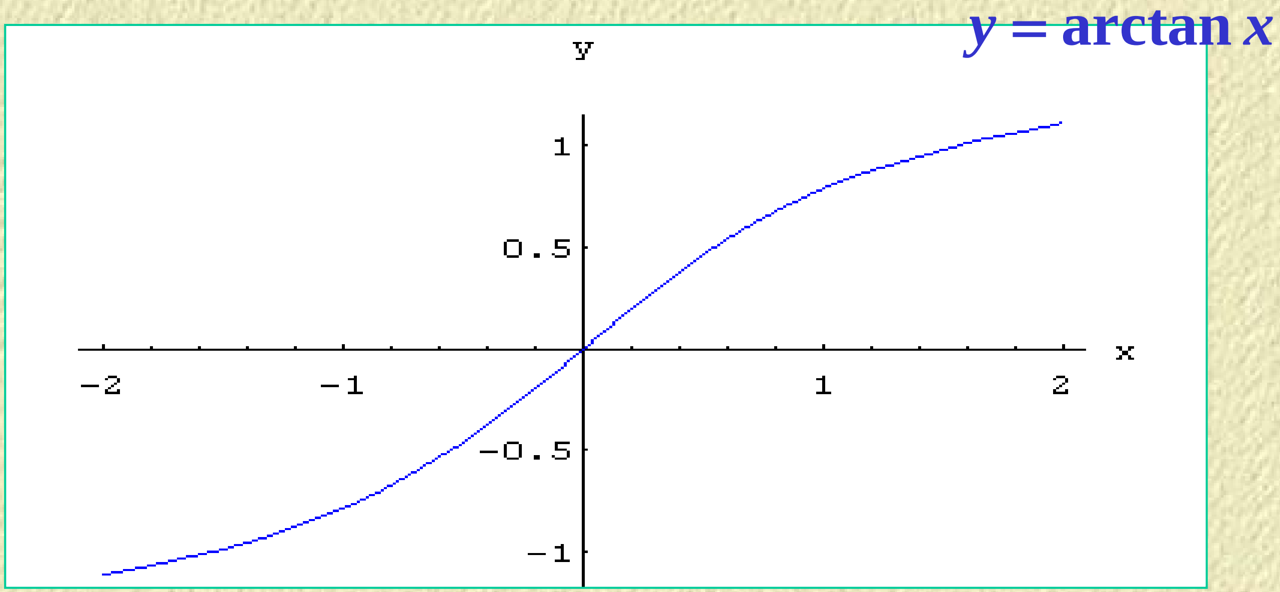
定义域: $[-1,1]$　　主值分支$[0,\pi]$

$y=\arccos x$



反正切函数 $y = \arctan x$

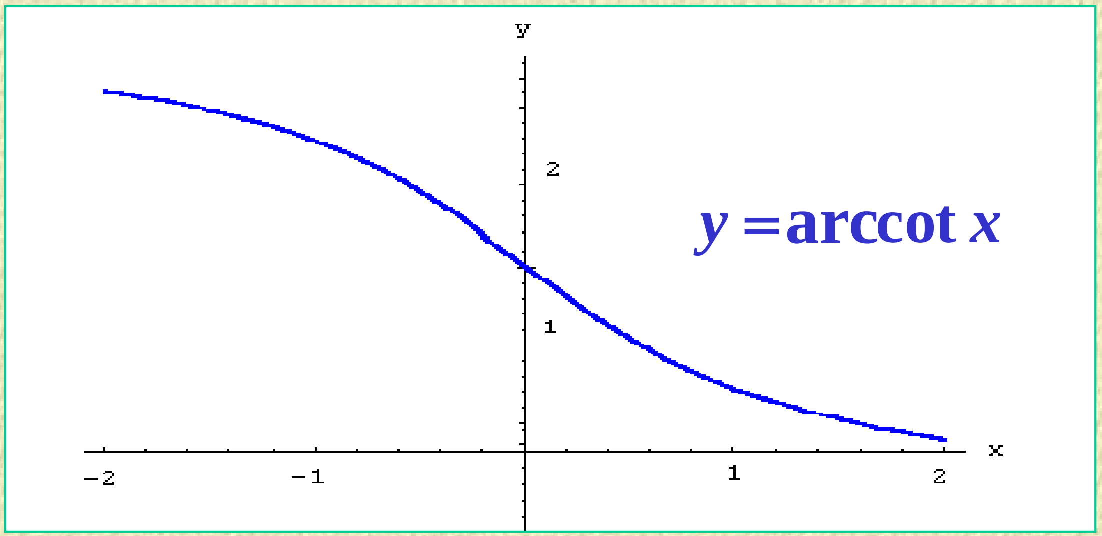
定义域: $(-\infty,+\infty)$ 主值分支 : $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$



上页 下页 返回

反余切函数 $y = \text{arccot}\, x$

定义域：$(-\infty,+\infty)$　主值分支：$(0,\pi)$



常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

4. 初等函数

定义：　由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合所构成并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.

例如：$y=\ln\sqrt{x^2+1}$, $y=|x|=\sqrt{x^2}$等.

形如 $[f(x)]^{g(x)}$, 其中$f(x), g(x)$是初等函数,

且$f(x)\succ 0$的函数称为幂指函数,如x^x,$(2x+1)^x$.

$$\because [f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$$

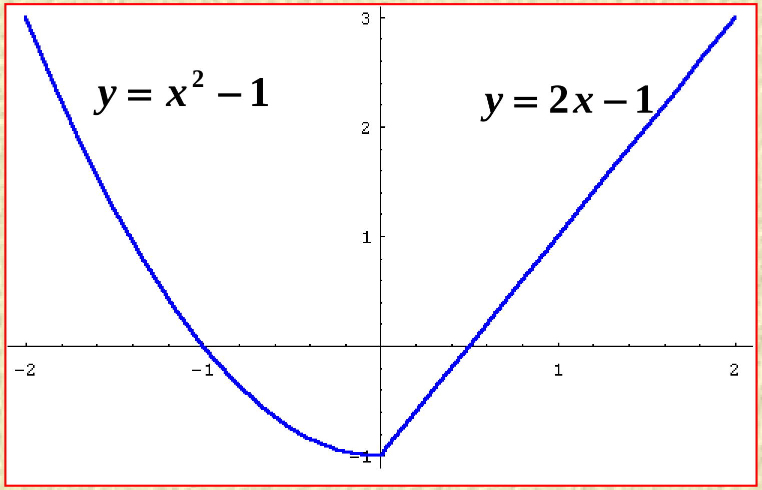
$\therefore$ 幂指函数是初等函数

上页　下页　返回

5. 分段函数

在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同的式子来表示的函数,称为<u>分段函数</u>.

例如,
$$f(x)=\begin{cases}2x-1, & x>0\\ x^2-1, & x\le 0\end{cases}$$



§ 1.2 常用经济函数

常见经济函数：

1.需求函数： 令P为商品价格，

$$Q_d = a - bP \quad (a,b>0)$$

$$Q_d = aP^{-b} \quad (a,b>0)$$

2.供给函数： 令P为商品价格，

$$Q_s = -a + bP \quad (a,b>0)$$

$$Q_S = ap^b \quad (a,b>0)$$

3. 总成本函数、总收入函数和总利润函数

上页 下页 返回

1）总成本函数： $TC = C(Q) = FC + VC(Q)$,

平均成本(单位产品成本)：$AC = \dfrac{FC}{Q} + \dfrac{VC(Q)}{Q}$

其中Q为产量，FC（fixed cost）固定成本，VC(variable cost)为可变成本。

2）收益函数： $TR(Q) = P \cdot Q$

3) 利润函数：$L(Q) = TR(Q) - TC(Q)$

称Q_0为盈亏临界点，

若$L(Q_0) = TR(Q_0) - TC(Q_0) = 0$。

§1.3 极限的概念

1.3.1 数列的极限

定义: 按自然数1,2,3,⋯编号依次排列的一列数

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \qquad (1)$$

称为无穷数列,简称数列.其中的每个数称为数列的项,a_n称为通项(一般项).数列(1)记为$\{a_n\}$.

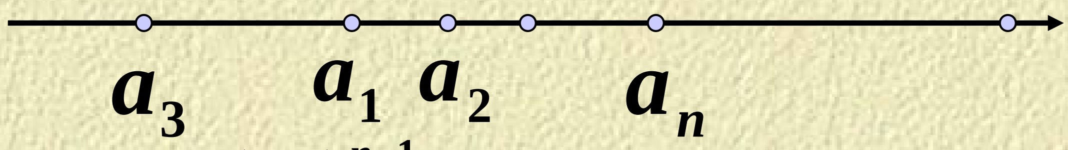
注1: 数列是整标函数 $a_n = f(n)$

例如 $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots;$ $\quad \{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\}$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots;$ $\quad \{\frac{1}{2^n}\}$

上页 下页 返回

注2： 数列对应着数轴上一个点列，可看作一动点在数轴上依次取



观察数列 $\{1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\}$ 当 $n\to\infty$ 时的变化趋势.

问题： 当 n 无限增大时, x_n是否无限接近于某一确定的数值?如果是,如何确定?

通过描点画图可观察到:

当 n 无限增大时, $x_n = 1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 无限接近于 1.

问题：“无限接近”意味着什么?

如何用数学语言刻划它.

$\because \quad |x_n - 1| = \left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$

给定 $\frac{1}{100}$，由 $\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$，只要 $n > 100$时，有 $|x_n - 1| < \frac{1}{100}$，

给定 $\frac{1}{1000}$，只要 $n > 1000$时，有 $|x_n - 1| < \frac{1}{1000}$，

给定 $\frac{1}{10000}$，只要 $n > 10000$时，有 $|x_n - 1| < \frac{1}{10000}$，

给定 $\varepsilon > 0$，只要 $n > N(=[\frac{1}{\varepsilon}])$时，有 $|x_n - 1| < \varepsilon$成立.

定义 1.4 如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小),总存在正数N,使得对于$n > N$时的一切a_n,不等式$|a_n - a| < \varepsilon$都成立,那么就称常数a是数列$\{a_n\}$的极限,或者称数列$\{a_n\}$收敛于a,记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad 或 a_n \to a \quad (n \to \infty).$$

如果数列极限不存在,就说数列是发散的.

注: 1.不等式$|a_n - a| < \varepsilon$刻划了a_n与a的无限接近;

2.N与任意给定的正数ε有关.

上页 下页 返回

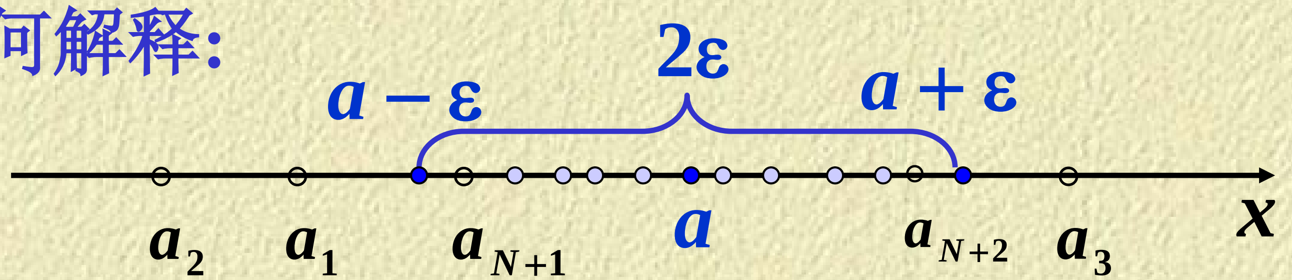
$\varepsilon - N$定义： $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 使$n > N$时, 恒有$|a_n - a| < \varepsilon.$

其中 $\forall$: 每一个或任给的;

$\exists$: 至少有一个或存在.

几何解释:



当$n > N$时, 所有的点a_n都落在$(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$内, 只有有限个(至多只有$N$个)落在其外.

注： 数列极限的定义可验证数列的极限，但未给出求极限的方法.

例1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}=0.$

小结：用定义证数列极限存在时,关键是任意给定$\varepsilon > 0$,寻找N,但不必要求最小的N.

例2　证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$,其中$|q| < 1$.

如何求数列的极限?

将$\{a_n\}$变形并利用数列极限的四则运算法则

数列极限的四则运算法则

设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，则

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n = ca$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = ab$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0, \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$$

例3 求下列数列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}[\ln(2n+1)-\ln n]$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{n}-3^{n+1}}{2^{2n+1}+3^{n}}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}\right)$.

常用的数列极限：

$$(1)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=0(\alpha\succ 0)$$

$$(2)\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a\succ 0)$$

$$(3)\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

$$(4)\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}=e$$

$$(5)\lim_{n\to\infty}q^{n}=\begin{cases}0,\ |q|\prec 1\\ \infty,|q|\succ 1\\ 1,q=1\\ \text{不存在，}\ q=-1.\end{cases}$$

定理1.1: 收敛的数列必定有界.

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 由定义, 取$\varepsilon = 1$,

则$\exists N$,使得当$n > N$时恒有$|a_n - a| < 1$,

即有 $a - 1 < a_n < a + 1.$

记 $M = \max\{|a_1|, \cdots, |a_N|, |a-1|, |a+1|\}$,

则对一切自然数n,皆有$|a_n| \le M$,故$\{a_n\}$有界.

注意: 有界性是数列收敛的必要条件.

推论 无界数列必定发散.

上页 下页 返回

问题: 函数 $y = f(x)$ 在 $x \to \infty$ 的过程中，对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A.

通过上面图形可观察到:

当 x 无限增大时，$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 无限接近于 0.

问题: 如何用数学语言刻划函数“无限接近”.

$|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;

$|x| > M$ 表示 $x \to \infty$ 的过程.

定义 1.5　如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在着正数M，使得满足$|x| > M$的x所对应的函数值$f(x)$都满足$|f(x) - A| < \varepsilon$，则常数A就叫函数$f(x)$当$x \to \infty$时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(当x \to \infty)$$

"$\varepsilon - M$"定义　$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$，使当$|x| > M$时，恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

上页　下页　返回

2、另两种情形:

$1^0.\ x \to +\infty$ 情形: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$

$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0,$ 使当$x > M$时, 恒有$|f(x) - A| < \varepsilon.$

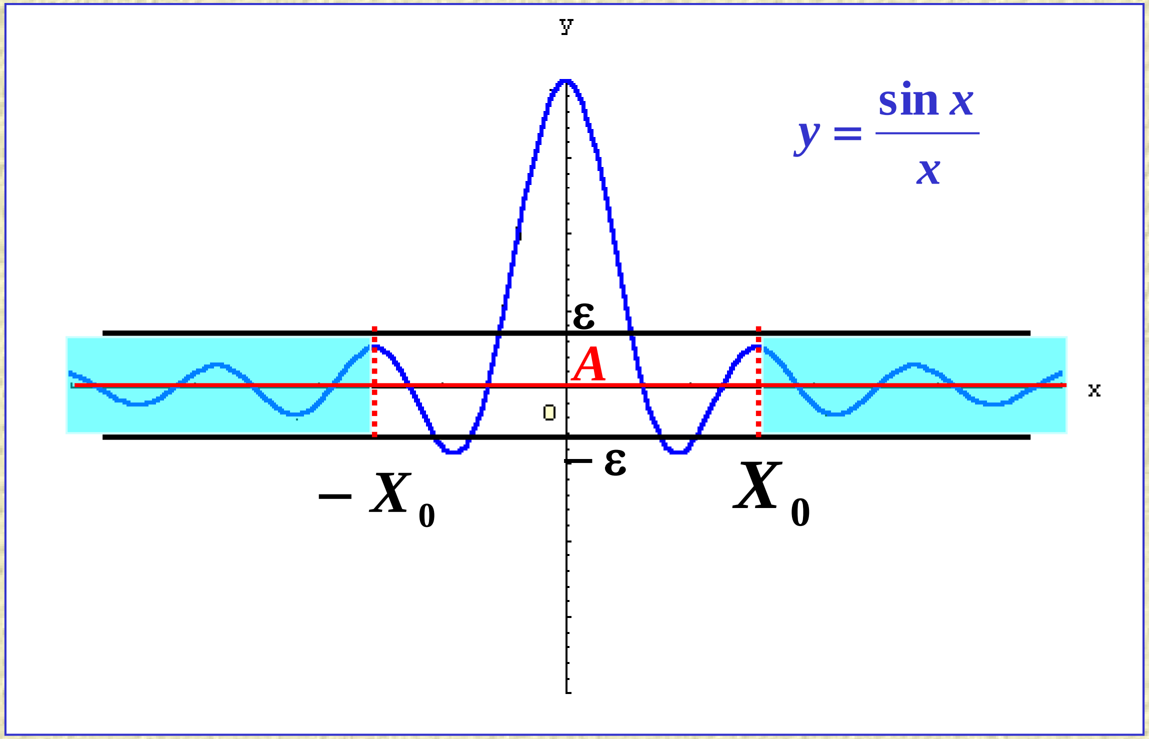
$2^0.\ x \to -\infty$ 情形: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$

$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0,$ 使当$x < -M$时, 恒有$|f(x) - A| < \varepsilon.$

定理: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$且$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A.$

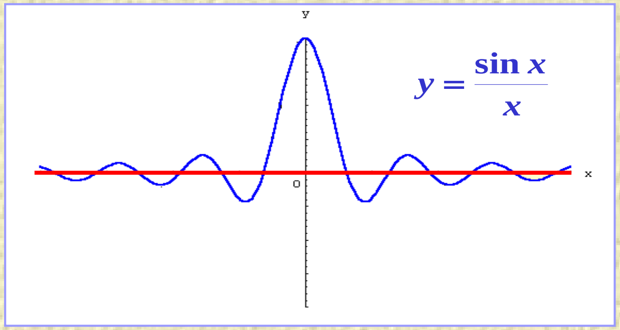
上页 下页 返回

3、几何解释:



当$x<-M$或$x>M$时, 函数 $y=f(x)$图形完全落在以直线$y=A$为中心线，宽为2ε的带形区域内.

例4 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$

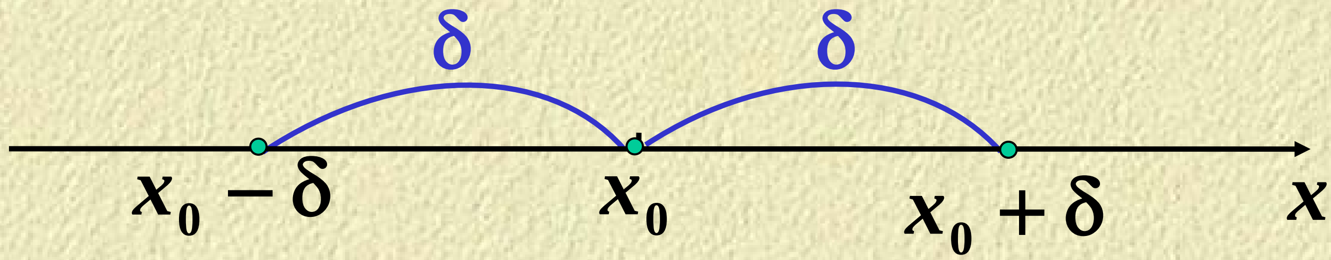


2、自变量趋向有限值时函数的极限

问题: 函数 $y = f(x)$ 在 $x \to x_0$ 的<u>过程中</u>,对应函数值 $f(x)$ 无限<u>趋近于</u>确定值 A.

$|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;

$0 < |x - x_0| < \delta$ 表示 $x \to x_0$ 的过程.



点 x_0 的去心 δ 邻域, δ 体现 x 接近 x_0 程度.

定义 1.6　如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小), 总存在正数δ, 使得对满足$0<|x-x_0|<\delta$的一切x, 对应的函数值$f(x)$都满足$|f(x)-A|<\varepsilon$, 那么常数A就叫函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限, 记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(当x\to x_0)$$

"$\varepsilon-\delta$"定义

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使当$0<|x-x_0|<\delta$时,

恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

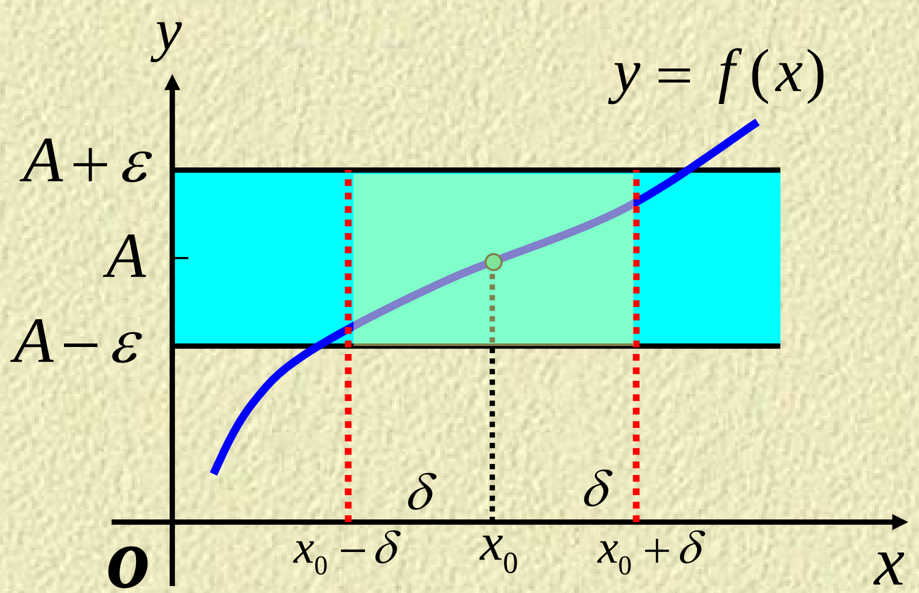
上页　下页　返回

注: 1.函数极限与$f(x)$在点x_0是否有定义无关;

2.δ与任意给定的正数ε有关.

3.几何解释:

当x在x_0的去心δ邻域时,函数$y=f(x)$图形完全落在以直线$y=A$为中心线,宽为2ε的带形区域内.



显然,找到一个δ后,δ越小越好.

上页 下页 返回

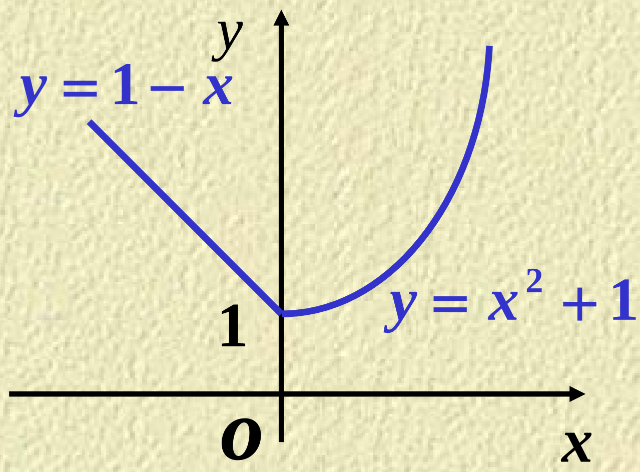
例5　证明 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2.$

单侧极限:

例如,

设 $f(x)=\begin{cases} 1-x, & x<0 \\ x^2+1, & x\geq 0 \end{cases}$

证明 $\lim_{x\to 0} f(x)=1.$



分 $x>0$ 和 $x<0$ 两种情况分别讨论

x 从左侧无限趋近 x_0, 记作 $x\to x_0^-$;

x 从右侧无限趋近 x_0, 记作 $x\to x_0^+$;

左极限(Left-hand Limit)

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{使当}x_0-\delta<x<x_0\text{时},$$

$$\text{恒有}\left|f(x)-A\right|<\varepsilon.$$

记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$ 或 $f(x_0^-)=A$ 或 $f(x_0-0)=A.$

右极限

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{使当}x_0<x<x_0+\delta\text{时},$$

$$\text{恒有}\left|f(x)-A\right|<\varepsilon.$$

记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 或$f(x_0^+)=A$ 或 $f(x_0+0)=A.$

注：$\{x \mid 0<\left|x-x_0\right|<\delta\}$

$$=\{x \mid 0<x-x_0<\delta\}\cup\{x \mid -\delta<x-x_0<0\}$$

上页 下页 返回

定理1.2 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$

例6 设$f(x)=\begin{cases} x-1, & x \prec 0 \\ \dfrac{x^2+3x-1}{x^3+1}, & x\geq 0 \end{cases}$,

求$\lim\limits_{x\to 0} f(x), \lim\limits_{x\to 1} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

上页 下页 返回

例7 求 $\lim_{x\to+\infty} e^x, \lim_{x\to-\infty} e^x, \lim_{x\to\infty} e^x$.

解

例8 求 $\lim_{x\to+\infty} \arctan x, \lim_{x\to-\infty} \arctan x, \lim_{x\to\infty} \arctan x$;

$\lim_{x\to+\infty} arc\cot x, \lim_{x\to-\infty} arc\cot x, \lim_{x\to\infty} arc\cot x$.

解

上页 下页 返回

例9 求

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1},\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1},\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1},\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1}.$$

解

§ 1.4 极限的运算

1.4.1 极限的运算法则

性质

设 $\lim\limits_{x\to X} f(x) = A, \lim\limits_{x\to X} g(x) = B,$ 则

(1) $\lim\limits_{x\to X} Cf(x) = C\lim\limits_{x\to X} f(x) = CA \quad (C\text{为常数})$

(2) $\lim\limits_{x\to X}[f(x)\pm g(x)] = \lim\limits_{x\to X} f(x) \pm \lim\limits_{x\to X} g(x) = A \pm B;$

(3) $\lim\limits_{x\to X}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to X} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to X} g(x) = A\cdot B;$

(4) $\lim\limits_{x\to X}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to X} f(x)}{\lim\limits_{x\to X} g(x)} = \dfrac{A}{B},\quad$ 其中 $B\neq 0.$

推论1 如果 $\lim\limits_{x\to X} f(x)$ 存在,而n是正整数,则

$$\lim_{x\to X}[f(x)]^n = [\lim_{x\to X} f(x)]^n.$$

推论2:(★) 如果 $\lim\limits_{x\to X}\dfrac{f(x)}{g(x)} = a, a\neq\infty$,且 $\lim\limits_{x\to X} g(x) = 0$,

则 $\lim\limits_{x\to X} f(x) = 0.$

$$\lim_{x\to X} f(x) = \lim_{x\to X}[\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)]$$

$$= \lim_{x\to X}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to X} g(x) = a\cdot 0 = 0.$$

上页 下页 返回

例1　设$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=5$, 求$a,b$.

解

例2　求 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 5}$.

解

小结: 1. 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$,则有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=a_0(\lim_{x\to x_0}x)^n+a_1(\lim_{x\to x_0}x)^{n-1}+\cdots+a_n$$

$$=a_0x_0^{\ n}+a_1x_0^{\ n-1}+\cdots+a_n=f(x_0).$$

2. 设 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 且$Q(x_0)\neq 0$, 则有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=f(x_0).$$

若$Q(x_0)=0$, 则商的法则不能应用.

例3 求 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1}$. $(\dfrac{0}{0}$型$)$

解

上页 下页 返回

例4 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}$.

解

上页 下页 返回

例5 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$.

解

小结: 当$a_0\neq 0, b_0\neq 0, m$和n为非负整数时有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, 当 n=m,\\ 0, 当 n>m,\\ \infty, 当 n<m,\end{cases}\quad (\bigstar)$$

上页 下页 返回

1.4.2 两个重要极限

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

例6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}.$

例7 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}.$

例9　求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sin\frac{2}{x})$.

例10　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$.

上页　下页　返回

2、$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x}=e.$

例11 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{1}{2x+1})^{x}.$

解

例12 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{2/x}.$

解

3. 连续复利公式

现有本金A_0，年利息率为r,若以复利计算，

t年末A_0将增值到A_t.

若以年为期计算利息，一年末的本利和为：$A_1 = A_0(1+r)$;

二年末的本利和为：$A_2 = A_0(1+r)^2$;

t年末的本利和为：$A_t = A_0(1+r)^t$;

若把一年均分成m期计算利息，则每期利息为r/m,则

$A_t = A_0(1+r/m)^{mt}$

连续复利下：

$$\lim_{m\to\infty} A_0(1+r/m)^{mt} = \lim_{m\to\infty} A_0(1+r/m)^{mrt/r} = A_0e^{rt}.$$

上页 下页 返回

§ 1.5 无穷小量与无穷大量

1.5.1 无穷小量

定义1.7　若 $\lim\limits_{x\to X} f(x)=0$, 则称 $f(x)$ 是 $x\to X$ 下的无穷小量，记为 $f(x)=o(1)\quad(x\to X)$.

例如,

$$\because \lim_{x\to 0}\sin x=0,$$

$\therefore$ 函数 $\sin x$ 是当 $x\to 0$ 时的无穷小量.

$$\because \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,$$

$\therefore$ 函数 $\dfrac{1}{x}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小量.

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0,$$

$\therefore$ 数列 $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ 是当 $n\to\infty$ 时的无穷小量.

注: （1）无穷小量是变量,不能与很小的数混淆;

（2）零是可以作为无穷小量的唯一的数.

上页 下页 返回

无穷小量的两个性质：

$$(1)\ \lim_{x\to X} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+o(1)\ \ (x\to X)$$

意义：

将一般极限问题转化为特殊极限问题(无穷小量)

(2)若$f(x)=o(1)(x\to X)$, $g(x)$是$x\to X$下的有界量，则$f(x)g(x)=o(1)\ \ (x\to X)$.

例如,当$x\to 0$时, $x\sin\frac{1}{x}, x^2\arctan\frac{1}{x}$ 都是无穷小

上页 下页 返回

推论1 在同一过程中,有极限的变量与无穷小量的乘积是无穷小量.

推论2 常数与无穷小量的乘积是无穷小量.

推论3 有限个无穷小量的乘积也是无穷小量.

3、在同一过程中,有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量.

注 无穷多个无穷小量的代数和未必是无穷小量.

例如, $n\to\infty$时, $\dfrac{1}{n}$是无穷小,

但n个$\dfrac{1}{n}$之和为1不是无穷小.

上页 下页 返回

定义1.8

若 $\lim\limits_{x\to X} f(x)=\infty$,则称$f(x)$是$x\to X$下的无穷大量.

特殊情形：正无穷大，负无穷大.

$$\lim_{x\to X} f(x)=+\infty \quad (\text{或} \lim_{x\to X} f(x)=-\infty)$$

如: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$, $\dfrac{1}{x}$是$x\to 0$下的无穷大量.

注

(1)未指出自变量的变化过程，判断一个函数是无穷小量或无穷大量是没有意义的.

如：　$f(x)=\frac{1}{x}\begin{cases} x\to 0, \text{无穷大量} \\ x\to\infty, \text{无穷小量} \end{cases}.$

(2)无穷大量是变量,不能与很大的数混淆.

(3)切勿将 $\lim\limits_{x\to X} f(x)=\infty$ 认为极限存在，

它只表示 $f(x)$ 在 $x\to X$ 时趋于(或发散到)∞.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$

(5)若 $\lim\limits_{x\to X} f(x)=\infty$, 则 $\frac{1}{f(x)}=o(1)\ (x\to X)$;

若 $\frac{1}{f(x)}=o(1)\ (x\to X)$, 且 $f(x)\neq 0$, 则 $\lim\limits_{x\to X} f(x)=\infty$.

上页　下页　返回

二、无穷小量和无穷大量阶的比较

例如，当$x \to 0$时，$x, x^2, \sin x, x^2\sin\frac{1}{x}$都是无穷小.

观察各极限

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{3x}=0,$$ x^2比$3x$要快得多；

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,$$ $\sin x$与x大致相同；

$(\frac{0}{0}$型$)$ $$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$$ 不存在. 不可比.

极限不同，反映了趋向于零的“快慢”程度不同.

定义1.9 设$f(x)=o(1), g(x)=o(1)$且$g(x)\neq 0(x\to X)$

(1)若$\lim\limits_{x\to X}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$,则$f(x)$是$g(x)$在$x\to X$下的高阶无穷小量,简记为$f(x)=o(g(x))\ (x\to X)$.即$x\to X$时,$f(x)$趋于0的速度比$g(x)$的更快.

(2)若$\lim\limits_{x\to X}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A(A\neq 0)$,则$f(x)$与$g(x)$是$x\to X$下的同阶无穷小量, 简记为

$$f(x)=O(g(x))\ (x\to X).$$

上页 下页 返回

特别当$A=1$,

则$f(x)$与$g(x)$是$x\to X$下的等价无穷小量，

简记为：$f(x)\sim g(x)\quad(x\to X)$.

$x\to X$时，$f(x)$趋于0的速度与$g(x)$的几乎相等.

(3)若$\lim\limits_{x\to X}\dfrac{f(x)}{g^k(x)}=A(A\neq 0,k\succ 0)$,则$f(x)$是$g(x)$

在$x\to X$下的k阶无穷小量.

上页 下页 返回

例1：$x \to 0, x^2, x, 1-\cos x$均为无穷小量，试比较它们的阶.

解

常见的等价无穷小量：当$x \to 0$时,

(1) $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x$

(2) $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

(3) $x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$

(4) $a^x - 1 \sim x\ln a \ (a \succ 0, a \neq 1)$

(5) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ ($\alpha \neq 0$是常数)

特别, $\alpha = n(n \in Z^+)$, $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$.

(6) $\ln x \sim x - 1 \quad (x \to 1)$

例2：求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x(e^{\sin x}-1)^2}{\tan^2 x}$.

解

例3：求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解

上页 下页 返回

例4：求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

解

上页 下页 返回

例5： 已知当$x \to 0$时,$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$与$\cos x-1$是等价无穷小量,求a.

解

上页 下页 返回

§ 1.6　函数连续

1.6.1 函数连续的概念

1.函数在 x_0 的连续

定义 1. 10　设函数 $f(x)$在$O_\delta(x_0)$内有定义,

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, 那么就称函数 $f(x)$在点

x_0连续, x_0称为 $f(x)$的连续点.

定义 1. 11　设函数 $f(x)$在$O_\delta(x_0)$内有定义,

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$, , 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$, 那么

就称函数 $f(x)$在点x_0连续.

例1 试证函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 在$x=0$

处连续.

证

上页 下页 返回

2.单侧连续

若函数$f(x)$在$(a, x_0]$内有定义,且$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$,

则称$f(x)$在点x_0处<u>左连续</u>;

若函数$f(x)$在$[x_0, b)$内有定义,且$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$,

则称$f(x)$在点x_0处<u>右连续</u>.

性质

函数 $f(x)$在 x_0 处连续$\Leftrightarrow$函数 $f(x)$在 x_0 处既左连续又右连续.

上页 下页 返回

例2 当a取何值时,

函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ a+x, & x\ge 0,\end{cases}$ 在 $x=0$处连续.

解

3.连续函数与连续区间

在区间上每一点都连续的函数,叫做在该区间上的连续函数,或者说函数在该区间上连续.

如果函数在开区间 (a,b)内连续，并且在左端点 $x=a$处右连续， 在右端点 $x=b$处左连续，则称函数 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$上连续，记为$f(x)\in C[a,b]$。$C[a,b]$表示在闭区间 $[a,b]$上的连续函数。

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

例如， $y=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内是连续的 .

上页 下页 返回

★ 三角函数及反三角函数在它们的定义域内连续.

★ 指数函数 $y = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

在$(-\infty,+\infty)$内单调且连续;

★ 对数函数 $y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

在$(0,+\infty)$内单调且连续;

★ $y = x^\mu = a^{\mu \log_a x} \longrightarrow y = a^u, u = \mu \log_a x.$

在$(0, +\infty)$内连续,讨论μ不同值,

(均在其定义域内连续)

定理 基本初等函数在定义域内是连续的.

一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

定义区间是指包含在定义域内的区间.

上页 下页 返回

注　1. 初等函数仅在其定义区间内连续，在其定义域内不一定连续;

例如，$y=\sqrt{x^2(x-1)^3}$，$D: x=0$，及$x \geq 1$，

在0点的邻域内没有定义.

函数在区间$[1,+\infty)$上连续.

注　2. 初等函数求极限的方法代入法.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (x_0 \in \text{定义区间})$$

例3　求$\lim\limits_{x \to 1} \sin \sqrt{e^x - 1}$.

解

上页　下页　返回

1.6.2 函数的间断点

函数 $f(x)$在点x_0处连续必须满足的三个条件：

(1) $f(x)$在点x_0处有定义;

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在;

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

如果上述三个条件中只要有一个不满足，则称函数 $f(x)$在点 x_0处不连续(或间断)，并称点 x_0为 $f(x)$的不连续点(或间断点).

上页 下页 返回

1.跳跃间断点

如果 $f(x)$在点 x_0处左，右极限都存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$,

则称点 x_0为函数$f(x)$的跳跃间断点，且$\left|\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\right|$

称为$f(x)$在x_0点的跳跃度.

例4 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ 1+x, & x > 0, \end{cases}$在$x=0$处的连续性.

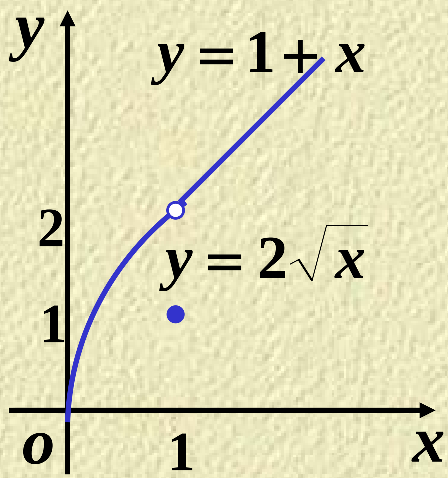
解

2.可去间断点 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$，或 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点．

例5 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\le x<1, \\ 1, & x=1 \\ 1+x, & x>1, \end{cases}$$

在 $x=1$ 处的连续性．



解

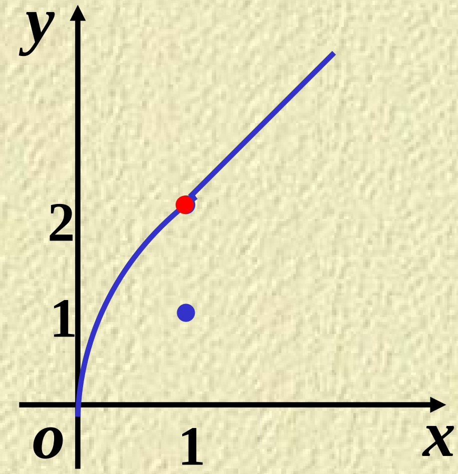
注　可去间断点只要改变或者补充间断处函数的定义，则可使其变为连续点.

上页　下页　返回

如例5中， 令 $f(1)=2$,

则 $f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\le x<1, \\ 1+x, & x\ge 1, \end{cases}$

在$x=1$处连续.



如 $x=0$是$y=\dfrac{\sin x}{x}$的可去间断点，若补充定义

$f(0)=1$, $y=\dfrac{\sin x}{x}$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

特点 函数在点 x_0处的左、右极限都存在.

上页 下页 返回

3.第二类间断点 如果 $f(x)$在点 x_0处的左、右极限至少有一个不存 在, 则称点 x_0为函数 $f(x)$的第二类间断点.

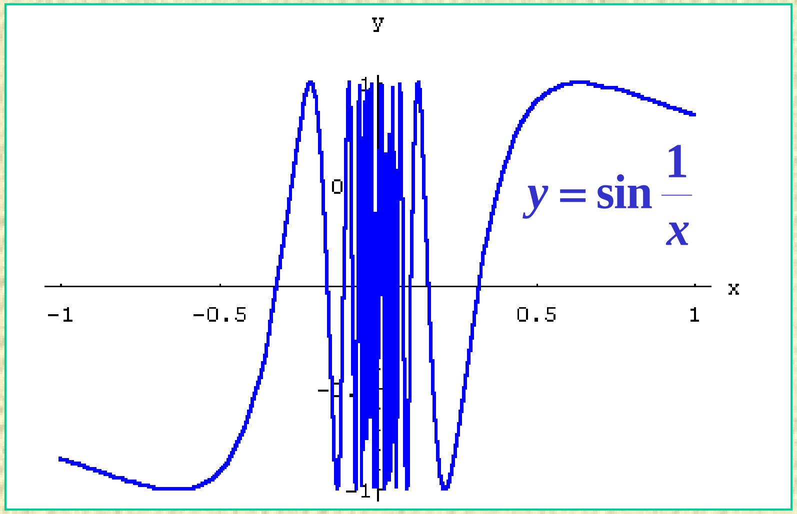
例6 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ x, & x\le 0,\end{cases}$在$x=0$处的连续性.

解

上页 下页 返回

例7 讨论函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解



上页 下页 返回

例8

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, x<0\\ \dfrac{x^2-1}{x-1}, 0<|x-1|\le 1\\ 2x-1, x>2\end{cases}$

求 $f(x)$ 的间断点，并判断它们的类型.

解

上页 下页 返回

1.6.3 连续函数的性质

定理1.6 若函数 $f(x)$, $g(x)$在点x_0处连续,

则$Cf(x)$(C为常数), $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$,

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0)\neq 0)$在点x_0处也连续.

例如, $\sin x, \cos x$在$(-\infty,+\infty)$内连续,

故 $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 在其定义域内连续.

上页 下页 返回

定理1.7 （反函数连续性定理） 严格单调的连续函数必有严格单调的连续反函数.

例如，

$y=\sin x$在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上严格增加且连续，

故 $y=\arcsin x$ 在$[-1,1]$上也是严格增加且连续.

同理 $y=\arccos x$ 在$[-1,1]$上严格减少且连续；

$y=\arctan x, y=\mathrm{arc}\cot x$ 在$(-\infty,+\infty)$上严格单调且连续.

上页 下页 返回

定理1.8 若 $\lim\limits_{x \to X} g(x) = A$, 函数 $f(x)$在点A连续,

则有 $\lim\limits_{x \to X} f[g(x)] = f(A) = f[\lim\limits_{x \to X} g(x)]$.

特别，若$g(x)$在点x_0连续，$f(x)$在点

$A = g(x_0)$连续，则$f[g(x)]$在点x_0连续.

注：极限符号可以与函数符号互换;

例9 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解

上页 下页 返回

幂指函数$y = u(x)^{v(x)}$的极限计算方法：

(1)若 $\lim\limits_{x\to X} u(x) = a(a \succ 0), \lim\limits_{x\to X} v(x) = b,$

则 $\lim\limits_{x\to X} u(x)^{v(x)} = a^b$

如：$\lim\limits_{x\to 1}(1+2x)^x = 3^1 = 3$

(2)若 $\lim\limits_{x\to X} u(x)^{v(x)}$ 为$1^\infty, 0^0, \infty^0$未定式，可利用等价无穷小等方法来求.

$$\lim_{x\to X} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to X} e^{v(x)\ln u(x)} = e^{\lim\limits_{x\to X} v(x)\ln u(x)}$$

如 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4+x}{2+x}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\frac{4+x}{2+x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\frac{4+x}{2+x}-1\right)} = e^2.$

上页 下页 返回

性质：若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A.$

例10　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^{n}.$

解　法1:

法2 :

上页　下页　返回

1.6.4 闭区间上连续函数的性质

定义: 对于在区间I上有定义的函数$f(x)$, 如果有$x_0 \in I$, 使得对于任一$x \in I$都有

$$f(x) \le f(x_0) \qquad (f(x) \ge f(x_0))$$

则称$f(x_0)$是函数$f(x)$在区间I上的最大(小)值.

例如, $y = 1 + \sin x$, 在$[0,2\pi]$上, $y_{\max} = 2$, $y_{\min} = 0$;

$y = \operatorname{sgn} x$, 在$(-\infty,+\infty)$上, $y_{\max} = 1$, $y_{\min} = -1$;

在$(0,+\infty)$上, $y_{\max} = y_{\min} = 1$.

定理 1.9(最大值和最小值定理) 在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

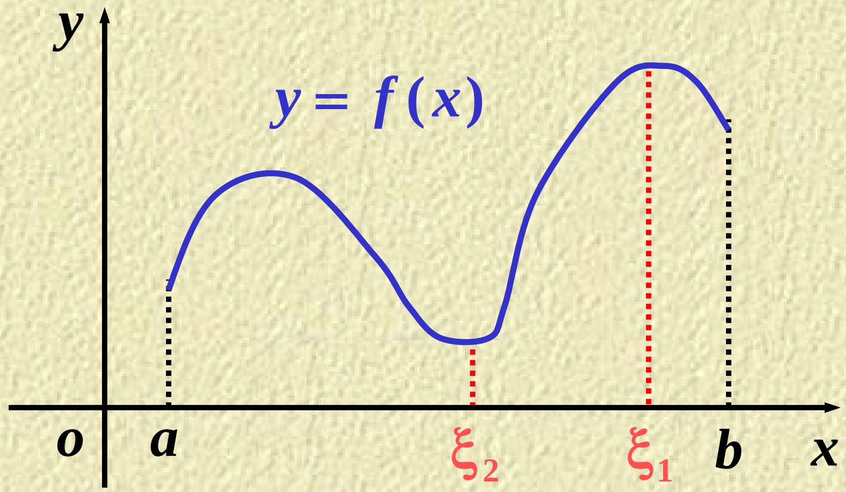
若 $f(x) \in C[a,b]$,

则 $\exists \xi_1, \xi_2 \in [a,b]$,

使得 $\forall x \in [a,b]$,

有 $f(\xi_1) \geq f(x)$,

$f(\xi_2) \leq f(x)$.



推论(有界性定理) 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

证 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续, $\forall x \in [a,b]$,

有 $m \leq f(x) \leq M$, 取 $K = \max\{|m|, |M|\}$, 则有 $|f(x)| \leq K$.

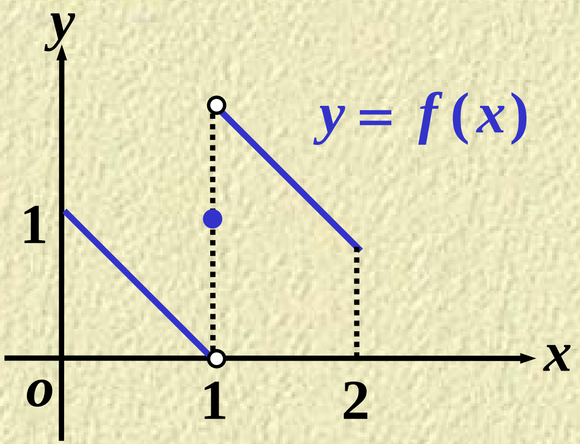
$\therefore$ 函数$f(x)$在$[a,b]$上有界.

注: 1.若区间是开区间，定理2.5不一定成立;

2.若区间内有间断点，定理2.5不一定成立.

例：$y = \tan x$在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$上连续，但无界，无最值.

例：$y = \begin{cases} -x+1, & 0 \le x \prec 1 \\ 1, & x = 1 \\ -x+3, & 1 \prec x \le 2 \end{cases}$



$x = 1$是$f(x)$的间断点，$y = f(x)$有界但无最值.

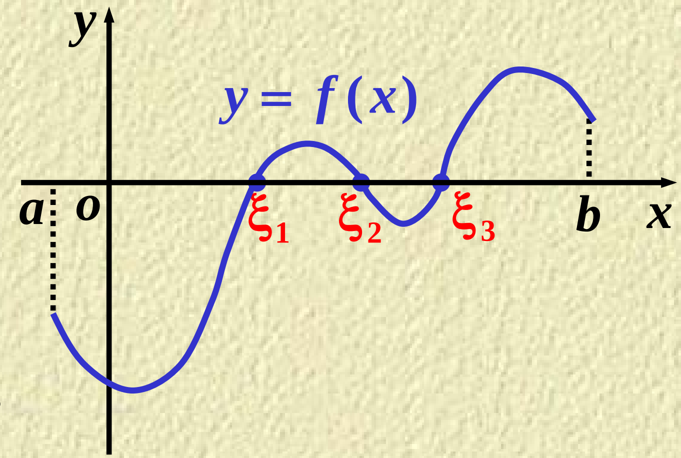
定义: 如果 x_0 使 $f(x_0)=0$, 则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的零点.

定理（零点存在定理） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号 (即 $f(a)\cdot f(b)<0$), 那末在开区间 (a,b) 内至少有函数 $f(x)$ 的一个零点, 即至少有一点 ξ $(a<\xi<b)$, 使 $f(\xi)=0$.

即方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少存在一个实根 .

几何解释:

连续曲线弧 $y = f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的不同侧,则曲线弧与 x 轴至少有一个交点.



定理 1.10（介值定理） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且设 m、M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值，则对于 $\forall c \in [m, M]$，一定存在 $x_0 \in [a,b]$，使得 $f(x_0) = c$. 且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域为 $[m, M]$.

几何解释: 连续曲线弧 $y = f(x)$ 与水平直线 $y = C$ 至少有一个交点.

例11 证明方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$在区间$(0,1)$内至少有一根.

证

上页 下页 返回

例12　已知p,q为满足$p+q=1$的两个正数，$f(x)$在$[a,b]$上连续．证明：必存在$x_0\in[a,b]$，使$f(x_0)=pf(a)+qf(b)$.

证

上页　下页　返回

例13 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且满足$0 < f(x) < 1$, $x \in [0,1]$. 证明：必存在$x_0 \in (0,1)$，使$f(x_0) = x_0$.

证:

上页 下页 返回

例14

在$(-\infty,+\infty)$内，方程$|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$,则

(*A*)无实根；　　(*B*)有且仅有一个实根；

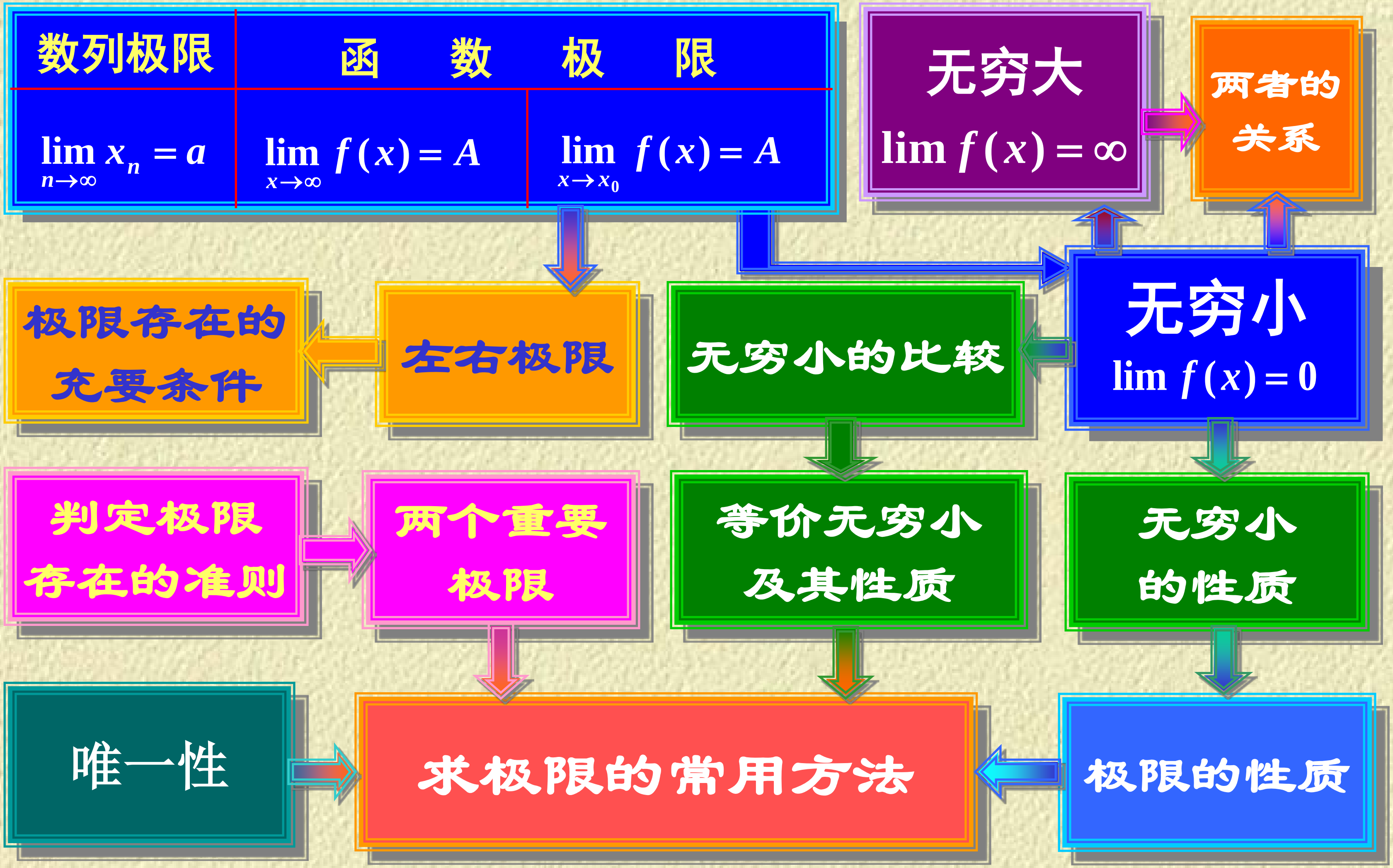
(*C*)有且仅有两个实根；　(*D*)有无穷多个实根.

解

上页　下页　返回

习题课

- 主要内容
- 典型例题



数列极限
$\lim_{n\to\infty} x_n = a$
函　数　极　限
$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$
$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$
无穷大
$\lim f(x) = \infty$
两者的关系
极限存在的充要条件
左右极限
无穷小的比较
无穷小
$\lim f(x) = 0$
判定极限存在的准则
两个重要极限
等价无穷小及其性质
无穷小的性质
唯一性
求极限的常用方法
极限的性质

连 续 定 义

$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

间断点定义

第一类 第二类

可跳去跃间间断断点点

无振穷荡间间断断点点

左右连续

连续的充要条件

在区间[a, b]上连续

连续函数的运算性质

基本初等函数的连续性

初等函数的连续性

连续函数的性质

二、典型例题

例1　求函数$y=\log_{(x-1)}(16-x^2)$的定义域.

解

例2 设当$x \to 0$时, $(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是$x\sin x^n$的高阶无穷小量,而$x\sin x^n$是$e^{x^2}-1$的高阶无穷小量,则正整数$n=(\quad)$.

$(A)1$ $(B)2$ $(C)3$ $(D)4$

解

上页 下页 返回

例3 求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cos\frac{\pi}{x}}{2-\sqrt{2x}}$.

解

上页 下页 返回

例4 设α是正整数,若$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{2000}}{x^{\alpha}-(x-1)^{\alpha}}=\beta\neq 0$,求$\alpha,\beta$.

解

例5 设$p(x)$是多项式，且$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{p(x)-x^3}{x^2}=2$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{p(x)}{x}=1,\text{求}p(x).$$

解

上页 下页 返回

例6 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$, 求 a.

解

上页 下页 返回

例7

求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ $a_i \succ 0(i=1,2,\cdots,n)$.

解

上页 下页 返回

例8 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

解

上页 下页 返回

例9 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

解

例10 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$.

解

上页 下页 返回

例11 当$|x|<1$时,

求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$.

解

上页 下页 返回

例12 讨论$f(x)=\begin{cases} |x-1|, & |x|>1 \\ \cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\le 1 \end{cases}$的连续性.

解

上页 下页 返回

例13 求$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\arctan|x|^n$的表达式,并求间断点.

解

上页 下页 返回

例14 设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(a)<a$，$f(b)>b$. 证明$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

证

上页 下页 返回

例15 试证：方程$x = a\sin x + b\ (a > 0, b > 0)$至少有一正根，且不超过$a + b$.

证

上页 下页 返回

例16 试证：方程$\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}=0$

在$(\lambda_1,\lambda_2),(\lambda_2,\lambda_3)$内各有一个的根，其中$a_1,a_2,a_3$均为大于零的常数，且$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$.

证

上页 下页 返回

例17　已知 $(2x)^x - 2 \sim a(x-1) + b(x-1)^2 \quad (x \to 1)$, 求 a, b 的值.

解

例18

设数列$\{x_n\}$满足：$0 \prec x_1 \prec \dfrac{1}{2}, x_{n+1} = x_n(1-2x_n),$

$n = 1,2,\cdots,$证明：(1) $\{x_n\}$单减，且$0 \prec x_n \prec \dfrac{1}{2},$

$n = 1,2,\cdots;$(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，并求其值.

证

教材P_{53}的第41题中的连续复利概念解释如下：

设数额为A按年利率R投资n年，

(1)若利息按一年计一次复利，则投资终值为：

$$A(1+R)^n$$

(2)若利息按一年计m次复利，则投资终值为：

$$A(1+\frac{R}{m})^{mn}$$

(3)连续复利的投资终值为：$\lim\limits_{m\to\infty} A(1+\frac{R}{m})^{mn} = Ae^{Rn}$

$\therefore$ 由题意可知：$Ae^{rn} = R_0e^{at} \Rightarrow A = R_0e^{(a-r)t}$

上页 下页 返回

常用的三角函数关系式

1.和差与积互化公式：

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

2.加法公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

3.平方公式

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1;$$

$$\sec^2 x=1+\tan^2 x;$$

$$\csc^2 x=1+\cot^2 x.$$

4.倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$$

$$\sin 3\alpha = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$