第三章 一元函数积分学

上页 下页 返回

§3.1 不定积分的概念

- 3.1.1原函数与不定积分的概念
- 3.1.2不定积分的性质与基本积分公式

上页 下页 返回

3.1.1 原函数与不定积分的概念

定义3.1 设$f(x)$是区间I内的函数，若存在函数$F(x)$，使得对$\forall x \in I$，恒有$F'(x) = f(x)$或$dF(x) = f(x)dx$，则称$F(x)$是$f(x)$在区间I内的一个原函数。

例 $(\sin x)' = \cos x$ $\quad$ $\sin x$是$\cos x$的原函数.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

$\ln x$是$\frac{1}{x}$在区间$(0,+\infty)$内的原函数.

注：原函数不唯一,但不同的原函数之间只差一个常数.

定理3.1 若$F(x)$是$f(x)$在区间 I内的一个原函数，则集合 $\{F(x)+C \mid C\text{为任意常数}\}$ 是由$f(x)$的原函数全体构成的集合，其中$F(x)+C$称为$f(x)$的原函数的一般表达式。

如 $\cos x$ 的原函数的一般表达式为

$\sin x + C$（C为任意常数）

$\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$的原函数的一般表达式为

$\ln x + C$（C为任意常数）

上页 下页 返回

定义3.2（不定积分的定义）

若$F(x)$是$f(x)$在区间I内的一个原函数，则$f(x)$的原函数的一般表达式 $F(x)+C$ (C为任意常数)

称为$f(x)$在区间I内的不定积分，记为$\int f(x)dx$.

即 $$\int f(x)dx = F(x)+C$$

积分号　被积函数　被积表达式　积分变量　任意常数

注：求不定积分即为求原函数，不定积分和原函数是计算定积分、重积分与解微分方程的基础，故很重要.

上页　下页　返回

例1 求 $\int \frac{1}{1+x^2} dx.$

解

上页 下页 返回

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

函数 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 的图形称为 $f(x)$ 的一条**积分曲线**,将其沿 y 轴任意平行移动,可得 $f(x)$ 的无穷多条积分曲线 $F(x)+C$，称为 $f(x)$ 的积分曲线族。

几何意义：一个积分曲线族。

若求通过点（x_0, y_0）（称为初始条件）的积分曲线，由初始条件可确定积分常数 C 的值。

3.1.2 不定积分的性质与基本积分公式

1. 基本性质

(1) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$

(2) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$

（k是常数，$k \neq 0$)

（3） $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x),\quad d[\int f(x)dx] = f(x)\boxed{dx}$

（4） $\int F'(x)dx = F(x) + C,\quad \int dF(x) = F(x) + C$

上页 下页 返回

结论：

1、微分运算与求不定积分的运算是**互逆**的；

2、检验积分结果是否正确，可对结果求导，看是否等于被积函数；

例2 求积分 $\int\left(\frac{3}{x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$

解 原式＝

上页 下页 返回

2. 基本积分公式

实例 $\left(\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)' = x^{\mu} \quad \Rightarrow \int x^{\mu}dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C.$

$(\mu \neq -1)$

启示　能否根据求导公式得出积分公式?

上页　下页　返回

基本积分公式 ☆

(1) $\int k dx = kx + C$ (k是常数);

(2) $\int x^{\mu} dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$;

注：求$\int x^{\mu} dx$时，若对μ无特殊的说明，则需讨论$\mu = -1$和$\mu \neq -1$两种情况求。

(3) $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$;

(4) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \ (a \succ 0, a \neq 1)$;

(5) $\int e^x dx = e^x + C$;

(6) $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$;

(7) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$;

上页 下页 返回

$$(8)\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$(9)\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$(10)\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C;$$

$$(11)\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C;$$

$$(12)\int \sec x \tan x dx = \sec x + C;$$

$$(13)\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C.$$

例3 求积分$\int \frac{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}-2x}{x\sqrt{1-x^2}}dx.$

解 原式＝

例4 求积分$\int \frac{1}{1+\cos 2x}dx.$

解 原式＝

上页 下页 返回

例5　求积分 $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

解　原式＝

说明：　求不定积分时，先将被积函数化简或运算，再利用不定积分的性质和基本积分公式来求。

上页　下页　返回

§3.2 不定积分的计算方法

3.2.1 换元换元法

3.2.2 分部积分法

上页 下页 返回

3.2.1 换元换元法

1、第一类换元法

问题 $\int \cos 2x dx \overset{?}{=} \sin 2x + C,$

解决方法 利用复合函数，设置中间变量.

过程 令 $t = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt,$

$$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t + C = \frac{1}{2} \sin 2x + C.$$

在一般情况下：

设 $F'(u)=f(u)$, 则 $\int f(u)du=F(u)+C$.

如果 $u=\varphi(x)$（可导）

$$\because \quad (F[\varphi(x)])'=f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

$$\therefore \quad \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=F[\varphi(x)]+C$$

$$=[\int f(u)du]_{u=\varphi(x)}$$ 由此可得换元法定理

上页 下页 返回

定理3.2 设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$， $u=\varphi(x)$ 可导，

则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = [\int f(u)du]_{u=\varphi(x)} = F(\varphi(x)) + C$$

第一类换元公式（**凑微分法**）

说明 使用此公式的关键在于将

$\int g(x)dx$ 化为 $\boxed{\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x).}$

观察重点不同，所得结论不同.

上页 下页 返回

例1 求$\int \sin 2x dx.$

解（一）原式

（二）原式

（三）原式

上页 下页 返回

例2 求$\int f'(x)f(x)dx$

解

原式

例3 求$\int (2x+5)^{50}dx.$

解

一般地

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)(a\neq 0)$$

上页 下页 返回

例4 求$\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}dx.$

解 原式

一般地 $\int f(\ln x)\frac{1}{x}dx = \int f(\ln x)d\ln x$

上页 下页 返回

例5 求 $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx \ (a \neq 0).$

解 原式

例6 求 $\int (1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx.$

解

小结：例1—6应用凑微分可直接观察到。

常用三角函数关系式

1.积化和差公式：

$$\sin\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x]$$

$$\sin\alpha x\sin\beta x=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x]$$

$$\cos\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x+\cos(\alpha+\beta)x]$$

2.倍角公式

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x;$$

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};$$

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}.$$

3.平方公式

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1;$$

$$\sec^2 x=1+\tan^2 x;$$

$$\csc^2 x=1+\cot^2 x.$$

例7 求 $\int \frac{1}{1+e^{x}}dx.$

解

(一)原式

(二)原式

上页 下页 返回

例8 求$\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}}dx.$

解

原式

小结：例7—8被积函数经过适当的变形如加减项或根式有理化，再应用凑微分。

上页 下页 返回

例9 求 $\int \frac{1}{1+\cos x} dx.$

解

原式

类似可求 $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

例10 求 $\int \csc x dx$.

解 原式

类似可求$\int \sec x dx$.

上页 下页 返回

例11 求 $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx.$

解 原式

$$\int \sin^{2m} x \cos^{2n+1} x dx$$
$$= \int \sin^{2m} x (1-\sin^2 x)^n d \sin x (m, n \in Z^+)$$

例12 求 $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$

解 原式

注：对$\int \sin^{2m} x\cos^{2n} x dx(m, n \in Z^+)$，利用倍角公式

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$降幂计算。

上页 下页 返回

小结：例9－12是三角函数求积分，常应用三角函数中的关系式来变形再用凑微分来求。此类变形通常较灵活多变，有一定的难度。

例13 求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}}dx.$

解

原式

2、第二类换元法

问题 $\int x^5\sqrt{1-x^2}dx = ?$

解决方法 改变中间变量的设置方法.

过程 令 $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$,

$$\int x^5\sqrt{1-x^2}dx = \int (\sin t)^5\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt$$

$$= \int \sin^5 t \cos^2 t dt = \cdots\cdots$$

（应用“凑微分”即可求出结果）

上页 下页 返回

定理3.3 设$x=\psi(t)$是单调的、可导的函数，且$\psi'(t)\neq 0$. 又设$f[\psi(t)]\psi'(t)$具有原函数，则有换元公式

$$\int f(x)dx=\left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\right]_{t=\psi^{-1}(x)}$$

其中$\psi^{-1}(x)$是$x=\psi(t)$的反函数.

证 设$\Phi(t)$为$f[\psi(t)]\psi'(t)$的原函数,

令$F(x)=\Phi(\psi^{-1}(x))$

则 $F'(x)=\dfrac{d\Phi}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=f[\psi(t)]\psi'(t)\cdot\dfrac{1}{\psi'(t)}$,

$=f[\psi(t)]=f(x)$.

说明$F(x)$为$f(x)$的原函数,

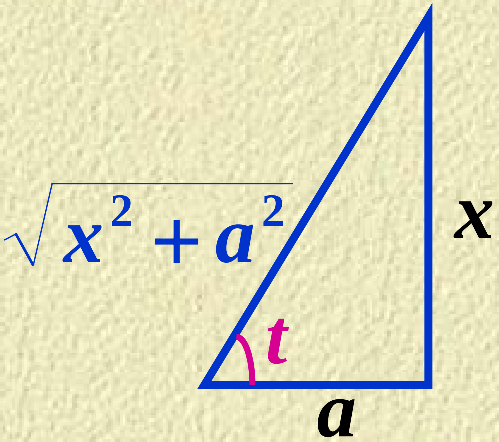
$\therefore \int f(x)dx=F(x)+C=\Phi[\psi^{-1}(x)]+C$,

第二类积分换元公式

$$\int f(x)dx=\left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\right]_{t=\psi^{-1}(x)}$$

例14 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx \quad (a>0)$.

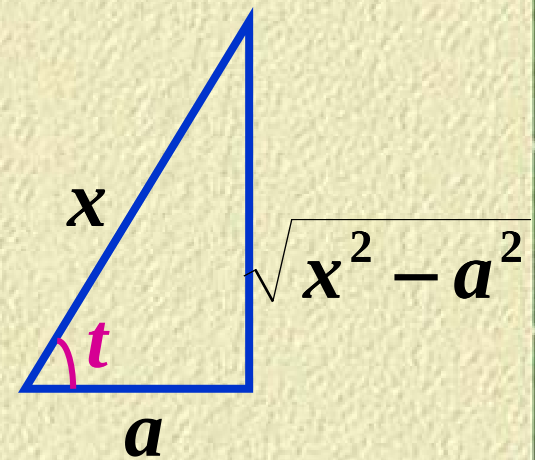
解



注1 用换元法得到的结果，必须代回原变量

例15 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx \quad (a > 0).$

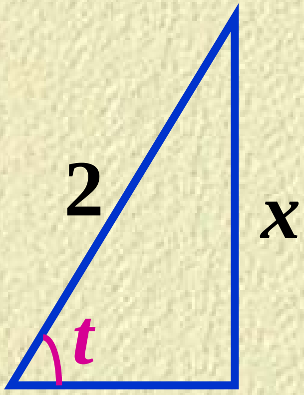
解 法一：



例16 求$\int x^3\sqrt{4-x^2}dx.$

解

原式



上页 下页 返回

注　　以上几例所使用的均为三角代换.

三角代换的目的是化掉根式.

一般规律如下：当被积函数中含有

(1) $\sqrt{a^2-x^2}$ 可令 $x=a\sin t\left(|t|<\frac{\pi}{2}\right)$, 原式 $=a\cos t$;

(2) $\sqrt{a^2+x^2}$ 可令 $x=a\tan t\left(|t|<\frac{\pi}{2}\right)$, 原式 $=a\sec t$;

(3) $\sqrt{x^2-a^2}$ 可令 $x=a\csc t\left(0<|t|<\frac{\pi}{2}\right)$, 原式 $=a|\cot t|$;

注

积分中为了化掉根式是否一定采用三角代换并不是绝对的，需根据被积函数的情况来定.

例17 求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx.$

解

例18 $\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}=\dfrac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}$,

上页 下页 返回

例19 求积分$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} dx$

解　原式

上页　下页　返回

注　当被积函数含有两种或两种以上的根式$\sqrt[k]{x},\cdots,\sqrt[l]{x}$时，可采用令$x=t^n$（其中$n$为各根指数的最小公倍数）

例20　求$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx.$

解

上页　下页　返回

3.2.2 分部积分法

问题 $\int xe^x dx = ?$ $\int \ln x dx = ?$

解决思路 利用两个函数乘积的求导法则.

定理3.4 设函数 $u = u(x)$ 和 $v = v(x)$ 具有连续导数,则有分部积分公式

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx \quad (1)$$

或

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

证明 由两个函数的乘积求导公式:

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

移项可得

$$u(x)v(x)'=[u(x)v(x)]'-u(x)'v(x)$$

对上式两端求不定积分得（1）式。

说明 $\underbrace{\int u(x)v'(x)dx}_{\text{不易求}} = u(x)v(x) - \underbrace{\int u'(x)v(x)dx}_{\text{易求}}$

不易求 $\xrightarrow{\text{分部积分法}}$ 易求

注：分部积分的关键是如何选择$u(x)$和$v(x)$，使$\int u'(x)v(x)dx$比$\int u(x)v'(x)dx$易求。

上页 下页 返回

例1　求积分$\int x\cos x dx$.

解（一）

解（二）

选$u(x)$和$v(x)$的原则是:

(1) 积分更容易的选为$v(x)$;(2)求导简单的选为$u(x)$。

常见的题型:

$$1.\text{形如}\left.\begin{array}{l}\int P_n(x)e^{\lambda x}dx(\lambda \neq 0)\\ \int P_n(x)\sin\beta x dx(\beta \neq 0)\\ \int P_n(x)\cos\beta x dx(\beta \neq 0)\end{array}\right\}\text{取}u(x)=P_n(x)$$

$P_n(x)$是n次多项式

$$2.\text{形如}\left.\begin{array}{l}\int P_n(x)\ln^m x dx(m \in Z^+)\\ \int P_n(x)\arcsin x dx\\ \int P_n(x)\arctan x dx\end{array}\right\}\text{取}v'(x)=P_n(x)$$

上页 下页 返回

例2　求积分$\int \ln x dx.$

解

例3　求积分$\int x \arctan x dx.$

解

原式

上页　下页　返回

例4　求积分$\int x^2 e^x dx$.

解

上页 下页 返回

例5　求积分 $\int e^{x}\sin x dx$.

解

3.3 定积分的概念和性质

3.3.1 定积分的定义

3.3.2 定积分的性质

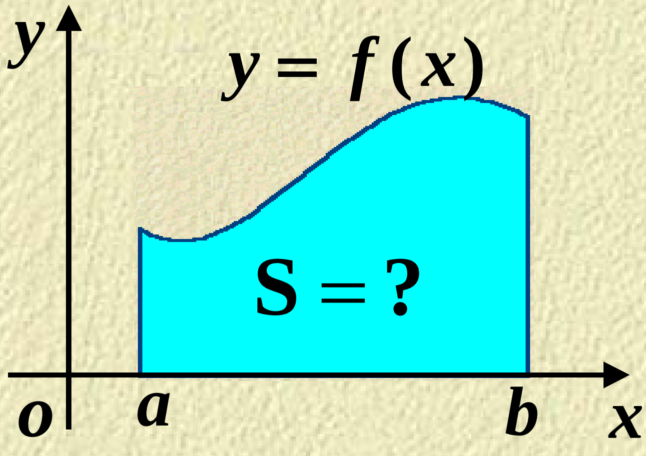
上页 下页 返回

3.3.1 定积分的定义

1、问题的提出

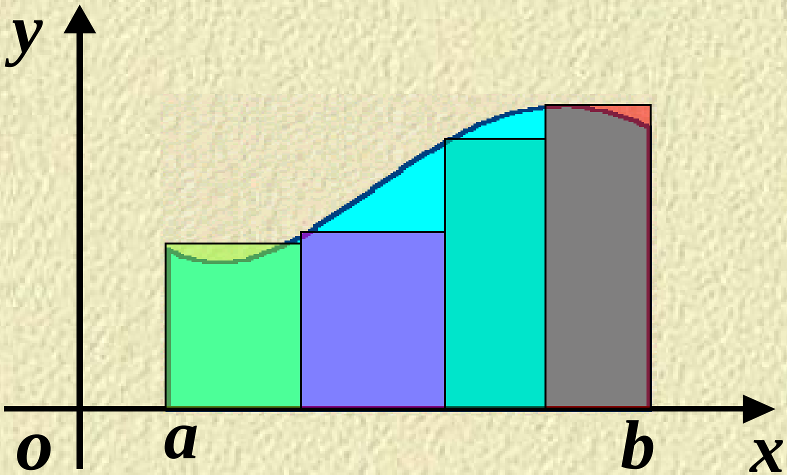
实例 （求曲边梯形的面积）

曲边梯形由连续曲线 $y = f(x)(f(x) \geq 0)$、x轴与两条直线 $x = a$、$x = b$所围成.

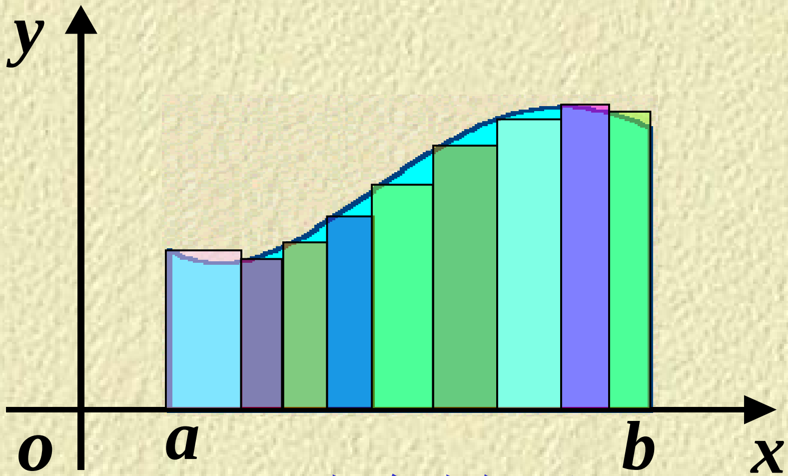


上页 下页 返回

用矩形面积近似曲边梯形面积



（四个小矩形）



（九个小矩形）

显然，小矩形越多，矩形总面积越接近曲边梯形面积.

问题：如何利用矩形面 积得到曲边梯形的面积？

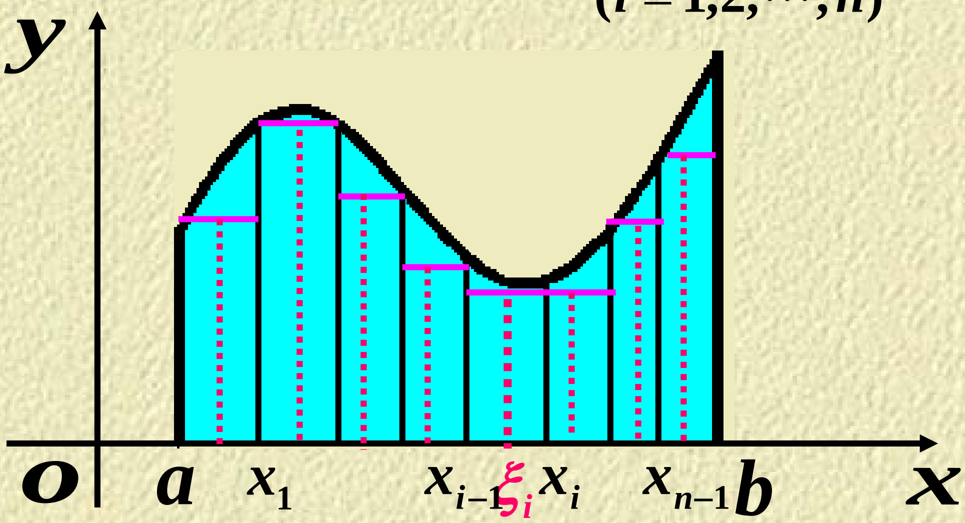
具体做法如下：

(1)分割

曲边梯形如图所示，在区间$[a,b]$内插入$n-1$个分点，$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，把区间$[a,b]$分成$n$个小区间$[x_{i-1},x_i]$，长度为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$；$(i=1,2,\cdots,n)$

过分点x_i作y轴的平行线，将曲边梯形分成n个小曲边梯形，记它们的面积为$\Delta S_i\,(i=1,2,\cdots,n)$，

则有$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i.$



(2)近似代替（以直代曲）

在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点ξ_i，用以$[x_{i-1},x_i]$为底，$f(\xi_i)$为高的小矩形面积来近似小曲边梯形的面积，则

$$\Delta S_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i\,(i=1,2,\cdots,n)$$

上页 下页 返回

(3)求和

曲边梯形面积的近似值为

$$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

(4)取极限

当分割无限加细,即小区间的最大长度 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$趋近于零 $(\lambda\to 0)$时,

曲边梯形面积为 $S=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$

2、定积分的定义

定义 3.3 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上有定义,在$[a,b]$中任意插入

$n-1$个分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$

把区间$[a,b]$分成n个小区间,小区间的长度为

$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\ (i=1,2,\cdots n)$,在各小区间上任取

一点$\xi_i\ (\xi_i\in[x_{i-1},x_i])$,作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i\ \ (i=1,2,\cdots)$

求和 $S_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$.

记$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$,令$\lambda\to 0$,若不论对$[a,b]$

上页 下页 返回

如何分割，也不论在小区间$[x_{i-1}, x_i]$上

点ξ_i取法如何，$\lim\limits_{\lambda\to 0} S_n = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

存在，称这个极限为函数 $f(x)$

在区间$[a,b]$上的**定积分**， 记为

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分上限

积分下限

积分和

被积函数

被积表达式

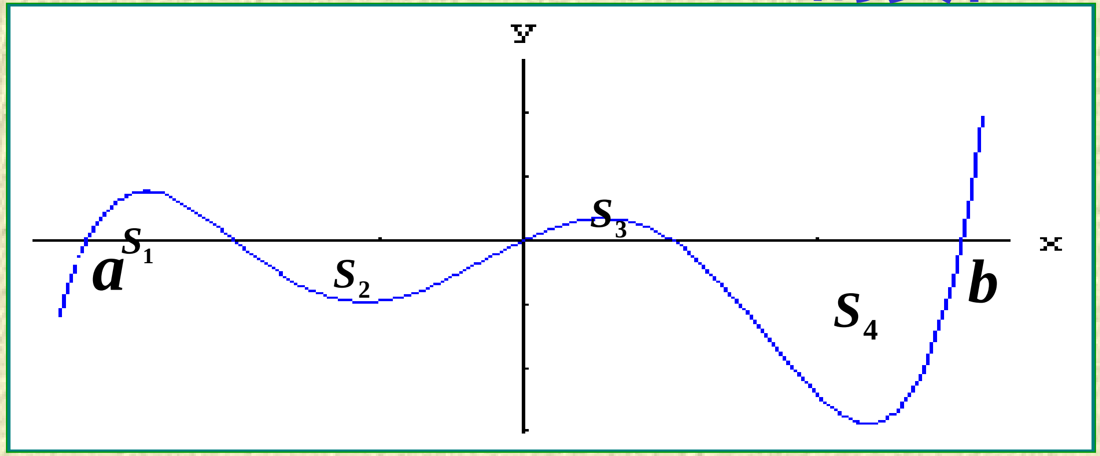
积分变量

$[a,b]$ 积分区间

3、定积分的几何意义

$f(x) \geq 0, \quad \int_a^b f(x)dx = S$ 曲边梯形的面积

$f(x) < 0, \quad \int_a^b f(x)dx = -S$ 曲边梯形的面积的负值

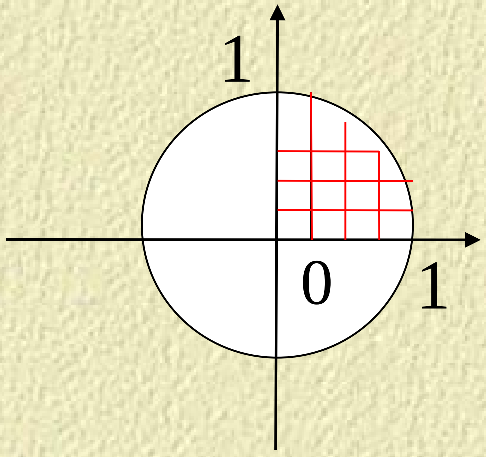


$$\int_a^b f(x)dx = S_1 - S_2 + S_3 - S_4$$

上页 下页 返回

例1.利用定积分的几何意义，说明下列等式:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$



上页 下页 返回

3.3.2定积分的基本性质

设下面性质中涉及的函数$f(x), g(x)$在$[a,b]$上均可积.

性质1 $$\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx \pm \beta\int_a^b g(x)dx.$$

（α，β是任意常数）

性质2 $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

性质3 如果在区间$[a,b]$上$f(x) \le g(x)$,

则$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx. \qquad (a < b)$$

上页 下页 返回

例 2　比较积分值 $\int_0^1 x^2 dx$ 和 $\int_0^1 x^3 dx$ 的大小.

解

例 3　比较积分值 $\int_0^{-2} e^x dx$ 和 $\int_0^{-2} x dx$ 的大小.

解

（注意上下限的大小）

性质4： 设M及m分别是函数

$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值及最小值，

则 $$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a).$$

证

（此性质可用于估计积分值的大致范围）

上页 下页 返回

例 4　估计积分$\int_0^{\pi}\frac{1}{3+\sin^3 x}dx$的值.

解

上页 下页 返回

性质5（定积分中值定理）

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ，

使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$. $(a \le \xi \le b)$

积分中值公式

证 $\because\ m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

$$\therefore\ m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

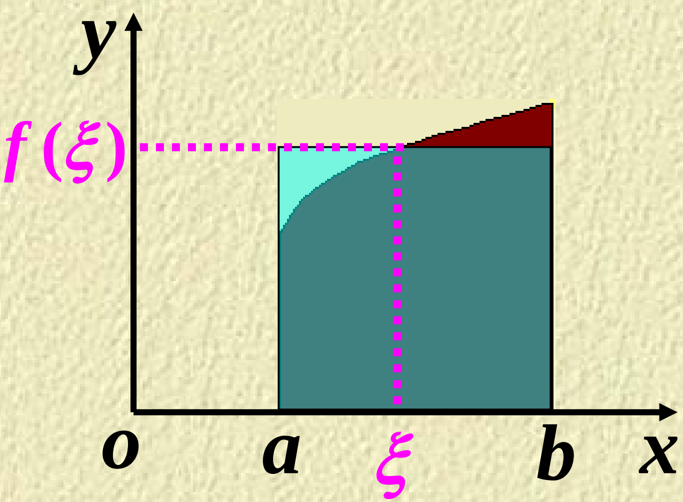
由闭区间上连续函数的介值定理知

在区间$[a,b]$上至少存在一个点ξ，

使 $$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

即 $$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).\quad (a\le\xi\le b)$$

积分中值公式的几何解释：



在区间$[a,b]$上至少存在一个点ξ，使得以区间$[a,b]$为底边， 以曲线$y=f(x)$为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为$f(\xi)$的一个矩形的面积。

3.4 积分学基本公式

- 一、积分上限函数及其导数
- 二、牛顿—莱布尼茨公式

上页 下页 返回

一、积分上限函数及其导数

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，并且设 x 为 $[a,b]$ 上的一点，考察定积分 $\int_a^x f(t)dt$

如果上限 x 在区间 $[a,b]$ 上任意变动，则对于每一个取定的 x 值，定积分有一个对应值，所以它在 $[a,b]$ 上定义了一个函数，

记 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 积分上限函数（变上限积分）

x： 积分上限变量，在 $[a,b]$ 上变化

t： 积分变量，在 $[a,x]$ 上变化

积分上限函数的性质

定理 3. 5 如果 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则积分上限函数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在$[a,b]$上具有连续导数，且它的导数是 $F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$ $(a \le x \le b)$

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则积分上限函数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 就是 $f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数. 故定理3.5又称原函数存在定理

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^{b(x)} f(t)dt = \frac{d}{dx}F[b(x)] = f[b(x)]b'(x)}$$

例1　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2}$.　　　$(\dfrac{0}{0})$

解

例2 求 $\frac{d}{dx}[\int_{x^2}^{0} x\cos t^2 dt]$

解

二、牛顿—莱布尼茨公式

定理 3.6（微积分基本公式）

如果$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的任意一个原函数，则$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

例3　求$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x + \sin x - 1)dx$.

解　原式

上页　下页　返回

例4　求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{1}{2} - \sin x \right| dx.$

解

§3.5 定积分的换元积分法与分部积分法

3.5.1定积分的换元积分法

3.5.2定积分的分部积分法

上页 下页 返回

3.5.1定积分的换元积分法

定理3.7 假设

（1） $f(x)$在$[a,b]$上连续；

（2）函数$x=\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$上有连续导数，且导数保持定号；

（3）当t在α,β之间变化时，$x=\varphi(t)$的值在$[a,b]$上变化，且$\varphi(\alpha)=a$、$\varphi(\beta)=b$，

则 $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

上页 下页 返回

证

$\because f(x)$在$[a,b]$上连续，$\therefore$ 它的原函数存在，

令$F(x)$为$f(x)$的一个原函数，则$F(\varphi(t))$是

$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$的一个原函数.由牛顿—莱布尼茨

公式可得

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta}$$

$$= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

又$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

例1　计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx$.

解

上页 下页 返回

注1：应用换元公式时应注意:

（1） 用 $x=\varphi(t)$ 把变量 x 换成新变量 t 时，积分限也相应的改变. **换元必换限**

（2） 求出 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数 $\Phi(t)$ 后，不必像计算不定积分那样再要把 $\Phi(t)$ 变换成原变量 x 的函数，而只要把新变量 t 的上、下限分别代入 $\Phi(t)$ 然后相减就行了.

(3) 用凑微分法能求积分的，可先求得原函数再用牛顿－莱布尼茨公式求；也可直接用换元法来做.

上页 下页 返回

例2　计算$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}dx$.

解

例3 计算 $\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$.

解

上页 下页 返回

例4　计算$\int_0^a \frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}dx.\quad (a>0)$

解

上页　下页　返回

例5 计算$\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx.$

解

上页 下页 返回

例 6 当 $f(x)$在$[-a,a]$上连续，且有

① $f(x)$为偶函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx;$$

② $f(x)$为奇函数，则$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

证

上页 下页 返回

例7 计算$\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx.$

解

3.5.2定积分的分部积分法

定理3.8 设函数$u(x)$、$v(x)$在区间$[a,b]$上具有连续导数，则有$\int_a^b u\,dv=[uv]_a^b-\int_a^b v\,du$.

定积分的分部积分公式

证 $\because (uv)'=u'v+uv'$, $\int_a^b (uv)'dx=[uv]_a^b$,

$$[uv]_a^b=\int_a^b u'v\,dx+\int_a^b uv'\,dx,$$

$$\therefore \int_a^b u\,dv=[uv]_a^b-\int_a^b v\,du.$$

上页 下页 返回

例8 计算 $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1+\cos 2x}$.

解

例9 计算 $\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\arcsin x dx$.

解

§3.7 定积分的应用

3.7.1平面图形的面积

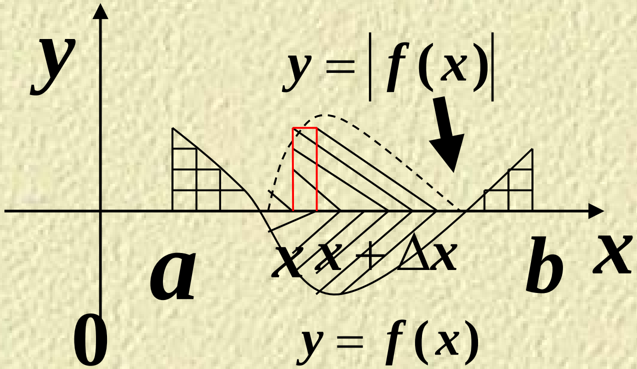
3.7.2定积分在经济学的应用

上页 下页 返回

3.7.1平面图形的面积

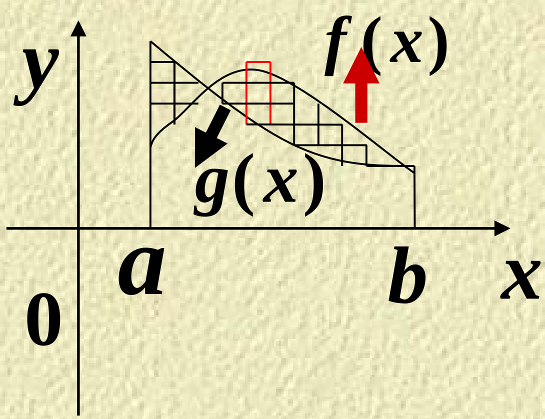
仅讨论用定积分计算在直角坐标系下的平面图形的面积.

情形1: 由直线$x=a, x=b, x$轴及$y=f(x)$($f(x)$在$[a,b]$上连续)所围成的平面图形面积.



$$\boxed{S=\int_a^b |f(x)|dx}$$

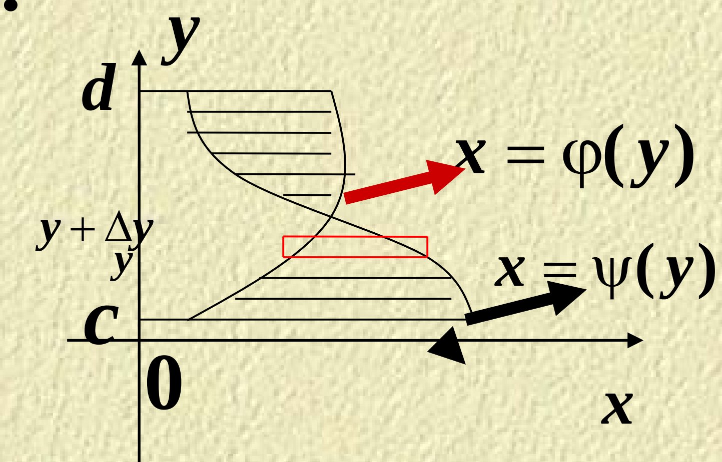
情形2: 由直线$x=a, x=b, y=f(x)$及$y=g(x)$($f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上连续)所围成的平面图形面积.



$$\boxed{S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx}$$

上页 下页 返回

情形3: 由直线$y=c, y=d$,曲线$x=\varphi(y)$及$x=\psi(y)$($\varphi(y)$,$\psi(y)$是$[c,d]$上的连续函数)所围成的平面图形的面积.

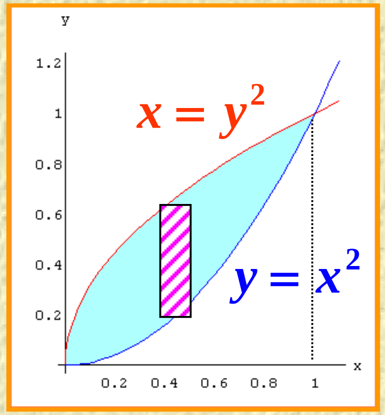


$$S=\int_c^d|\varphi(y)-\psi(y)|dy$$

注1: 对于求由两曲线所围封闭图形的面积，应该先画草图，根据图形特点选择积分变量，再求两曲线的交点的坐标，其中的横坐标即为情形2中定积分的上下限，纵坐标为情形3中定积分的上下限。

例 1 计算由两条抛物线$y^2 = x$和$y = x^2$所围成的图形的面积.

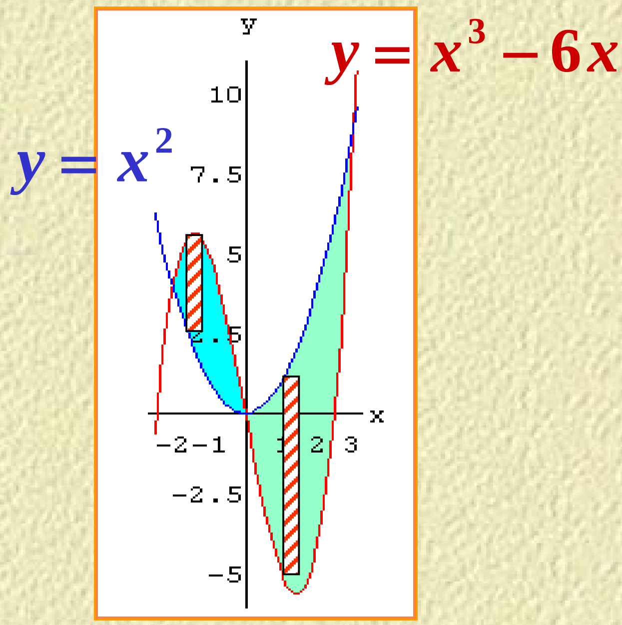
解



上页 下页 返回

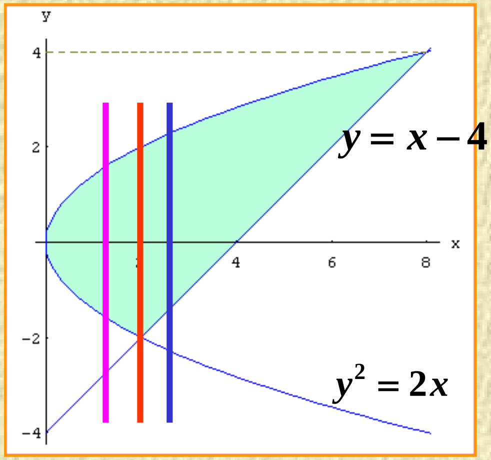
例 2　计算由曲线 $y = x^3 - 6x$ 和 $y = x^2$ 所围成的图形的面积.

解



例 3 计算由曲线 $y^2 = 2x$ 和直线 $y = x - 4$ 所围成的图形的面积.

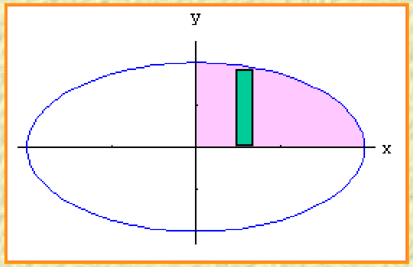
解



上页 下页 返回

例 4　求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$ 的面积.

解



上页　下页　返回

3.7.2定积分在经济学中的应用

1. 由边际函数求总函数

已知总成本函数$C=C(q)$,总收益函数$R=R(q)$.

则边际成本函数：$MC=\dfrac{dC}{dq}$；边际收益函数$MR=\dfrac{dR}{dq}$

则总成本函数：$C(q)=\int_0^q MCdq+C_0$

总收益函数：$R(q)=\int_0^q MRdq$

$C_0=C(0)$:固定成本

总利润函数：$L(q)=\int_0^q (MR-MC)dq-C_0$.

例5(关于产量的利润最大化问题)

生产某产品的固定成本为50万元，边际成本与边际收益分别为(单位：万元/单位)

$$MC = q^2 - 14q + 111,\ MR = 100 - 2q$$

试确定厂商的最大利润.

分析：若已知最大利润时的产量q_0，代入总利润函数便可得最大利润。

解

上页 下页 返回