二元函数微积分

一元函数微分学

推广

二元函数微分学

注意: 善于类比, 区别异同

二元函数的基本概念

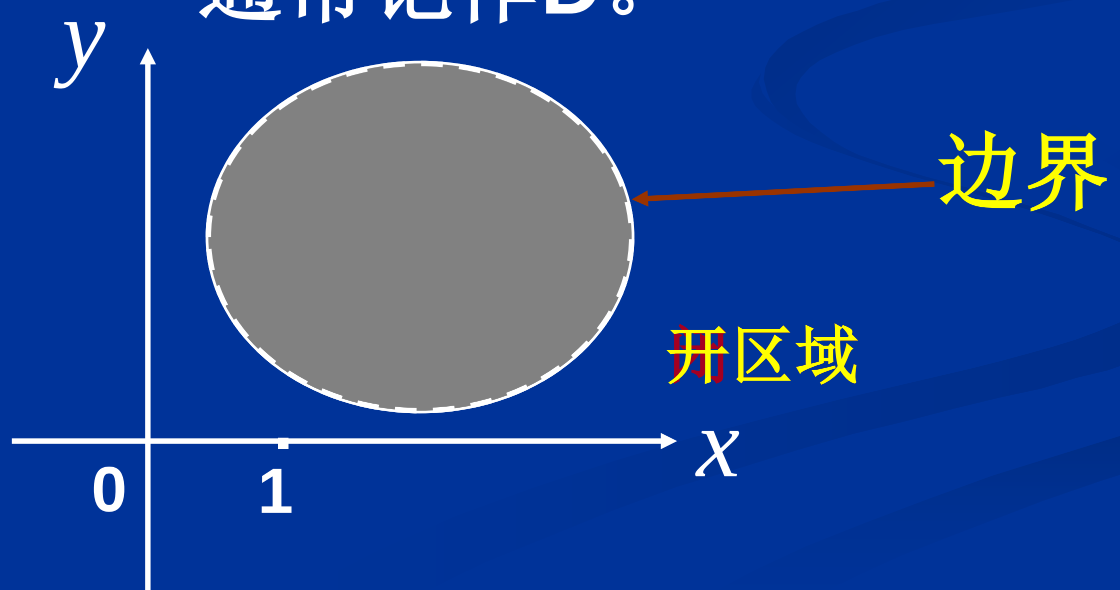
一、区域

二、二元函数的概念

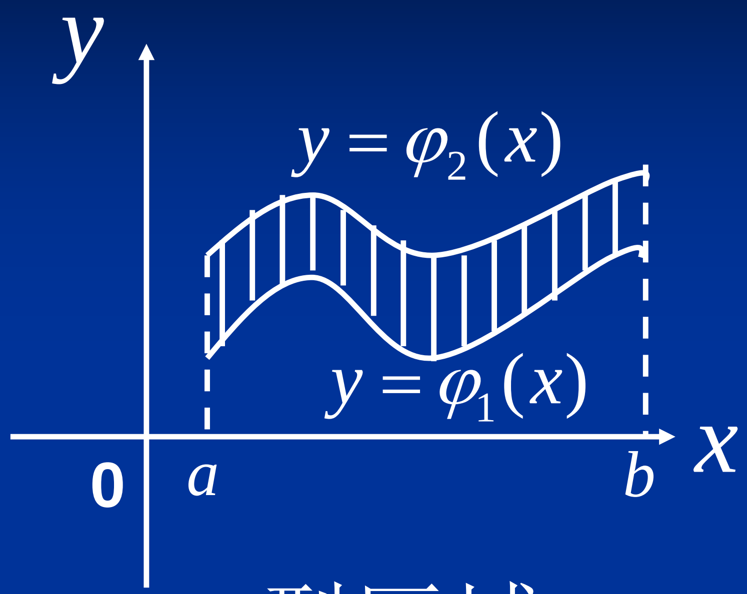
区域

平面点集：　平面上满足某个条件的一切点构成的集合。

平面区域：　由平面上一条或几条曲线所围成的部分平面点集称为平面区域，通常记作D。



常见区域

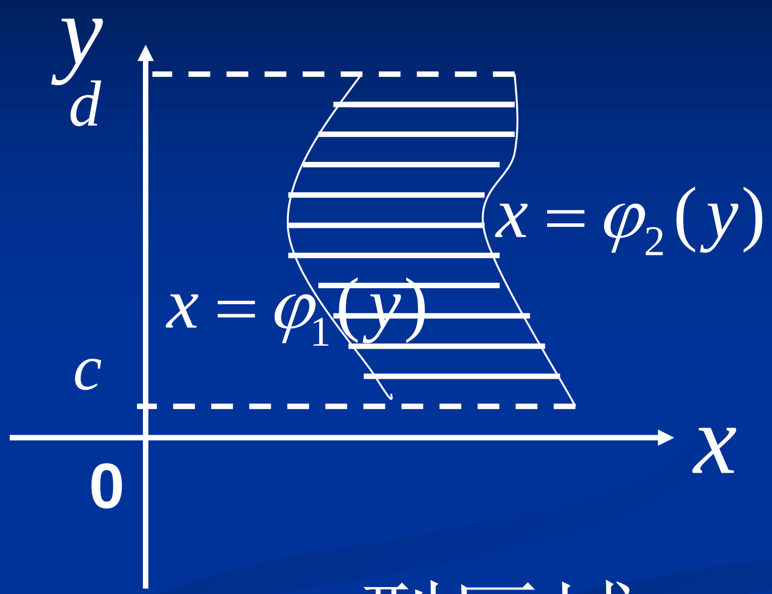


X 型区域

由 $x=a$ $x=b$

$y=\varphi_2(x)$ $y=\varphi_1(x)$

四条曲线围成



Y 型区域

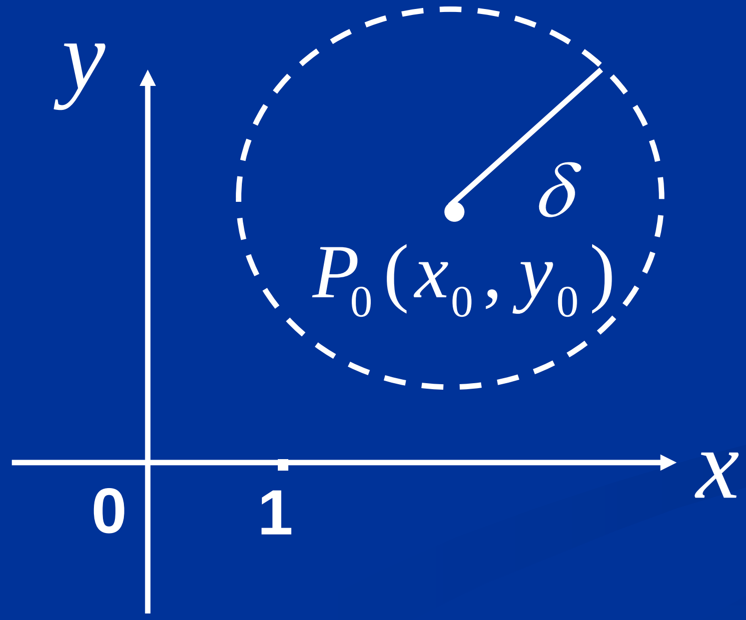
由 $y=c$ $y=d$

$x=\varphi_1(y)$ $x=\varphi_2(y)$

四条曲线围成

邻域:

平面上以点 $P_0(x_0, y_0)$ 为圆心，$\delta > 0$ 为半径的圆内部构成的有界开区域 $D = \left\{(x, y) \middle| \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta, \delta > 0\right\}$ 称为点 $P_0(x_0, y_0)$ 的 δ 邻域。



二元函数的概念

定义：设有三个变量 x, y 和 z ，如果当变量 x, y 在某平面区域 D 内任取一组值时，变量 z 按照一定的规律 f ，总有唯一确定的数值与之对应，则称 z 为 x, y 的二元函数，记作 $z = f(x, y)$ ，其中 x, y 称为自变量，函数 z 也称为因变量，x, y 的变化范围 D 称为函数的定义域。

类似的，可以定义三元函数 $u = f(x, y, z)$ 及三元以上的函数。

	自变量个数	定义域
一元函数	一个：x	在数轴上讨论（区间）
二元函数	两个：x, y	在平面上讨论（区域）

偏导数

一、 偏导数概念及其计算

二、高阶偏导数

定义： 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内

极限 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 对 x

的偏导数，记为 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$; $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$; $\left.z_x\right|_{(x_0,y_0)}$;

$f_x'(x_0,y_0)$; $f_1'(x_0,y_0)$

注意: $$f_x'(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\right|_{x=x_0}$$

同样可定义对 y 的偏导数

$$f_y'(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x_0, y)\Big|_{y=y_0}$$

若函数 $z = f(x, y)$ 在域 D 内每一点 (x, y) 处对 x 或 y 偏导数存在，则该偏导数称为偏导函数, 也简称为偏导数，记为

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial x}, \ z_x, \ f_x'(x, y), \ f_1'(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \ \frac{\partial f}{\partial y}, \ z_y, \ f_y'(x, y), \ f_2'(x, y)$$

偏导数的概念可以推广到二元以上的函数 .

例如, 三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 (x, y, z) 处对 x 的偏导数定义为

$$f_x'(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$f_y(x, y, z) = ?$$

(请自己写出)

$$f_z(x, y, z) = ?$$

由偏导数的定义可以看出，要求二元函数对某个自变量的偏导数，只需将另一个自变量看做常量，然后利用一元函数求导公式和求导法则即可。

例1．求 $z = x^2 + 3xy + y^2$ 在点$(1, 2)$ 处的偏导数.

例2. 设 $z = x^y \ (x > 0, 且 x \neq 1)$, 求证

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$$

证:

例3. 求 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 的偏导数 .

解:

例4. **已知理想气体的状态方程** $pV = RT$ (R 为常数)，

求证: $\dfrac{\partial p}{\partial V} \cdot \dfrac{\partial V}{\partial T} \cdot \dfrac{\partial T}{\partial p} = -1$

证:

练　习

1、求二元函数 $z = e^{xy}$ 的一阶偏导数。

2、求二元函数 $z = \arctan\dfrac{y}{x}$ 的一阶偏导数。

3、求二元函数 $z = e^{\sin x}\cos y$ 的一阶偏导数。

4、求二元函数 $z = y\ln(x^2 + y^2)$ 的一阶偏导数。

5、已知二元函数 $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$，证明：关系式

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$$

二、高阶偏导数

设 $z = f(x, y)$在域 D 内存在连续的偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y)$$

若这两个偏导数仍存在偏导数，则称它们是$z = f(x, y)$的二阶偏导数．按求导顺序不同，有下列四个二阶偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y)$$

类似可以定义更高阶的偏导数.

例如，$z = f(x, y)$ 关于 x 的三阶偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$$

$z = f(x, y)$ 关于 x 的 $n-1$ 阶偏导数，再关于 y 的一阶偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}\right) = \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}$$

例 5.　求二元函数 $z = e^{x-y}$ 的二阶偏导数。

解：

例6. **证明函数** $u=\frac{1}{r}, r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足拉普拉斯方程 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

证：

内容小结

1. 偏导数的概念及有关结论

- 定义; 记号

2. 偏导数的计算方法

- 求一点处偏导数的方法 $\begin{cases} \text{先求后代（把其他变量视为常数）} \\ \text{利用定义} \end{cases}$
- 求高阶偏导数的方法 —— 逐次求导法

练 习

1、求二元函数 $z = x^2 y e^y$ 的各二阶偏导数。

2、求二元函数 $z = x^3 + y^3 - 3xy^2$ 的各二阶偏导数。

3、求二元函数 $z = \dfrac{x}{y}$ 的各二阶偏导数。

4、求二元函数 $z = x\ln(x + y)$ 的各二阶偏导数。