§12-2 多元函数的极值及其求法

- 多元函数的极值和最值

0、问题的提出

引例1：某商店卖两种牌子的果汁，本地牌子每瓶进价1元，外地牌子每瓶进价1.2元，店主估计，如果本地牌子的每瓶卖 x 元，外地牌子的每瓶卖 y 元，则每天可卖出 $70-5x+4y$ 瓶本地牌子的果汁，$80+6x-7y$ 瓶外地牌子的果汁问：店主每天以什么价格卖两种牌子的果汁可取得最大收益？

显然每天的收益为 $f(x,y)=$

$$(x-1)(70-5x+4y)+(y-1.2)(80+6x-7y)$$

求最大收益即为求二元函数的最大值.

引例2：小王有200元钱，他决定用来购买两种急需物品：计算机U盘和鼠标，设他购买x个U盘，y个鼠标达到最佳效果，效果函数为 $U(x,y)=\ln x+\ln y$．设每个U盘8元，每个鼠标10元，问他如何分配这200元以达到最佳效果.

问题的实质：求 $U(x,y)=\ln x+\ln y$在条件 $8x+10y=200$下的极值点.

两个引例中都是求多元函数的最值！为了求最值，先讨论与最值有密切联系的极值问题！

从上面的两个引例中可以看到，与一元函数极值不同，多元函数的极值分为两类：

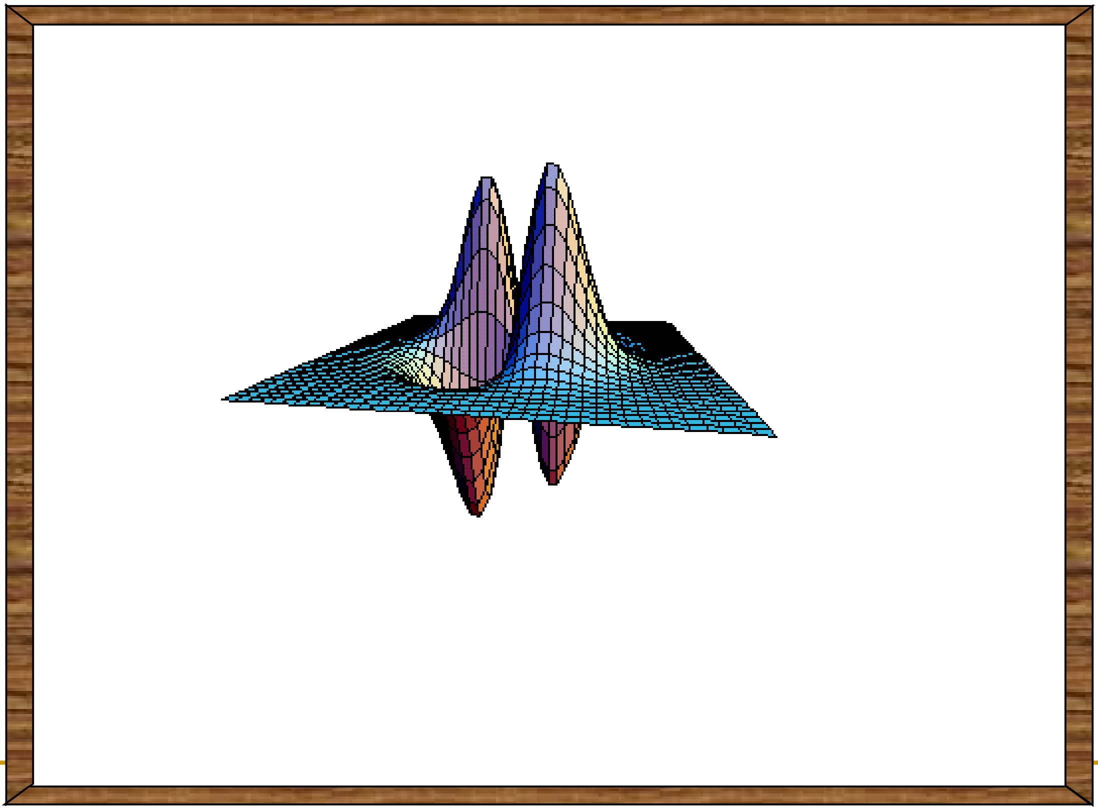
无条件极值： 对自变量除了限制在定义域内外，并无其他条件. 如引例1。

条件极值： 对自变量附加条件的极值问题称为条件极值. 如引例2。

思考： 为什么一元函数的极值没有分类！

一、 多元函数极值的定义

观察二元函数 $z=-\dfrac{xy}{e^{x^2+y^2}}$ 的图形



多元函数极值的定义

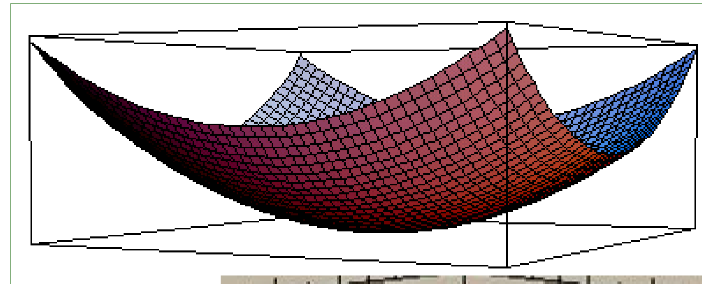
二元函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有定义，对于该邻域内异于(x_0,y_0)的点(x,y)：若满足不等式$f(x,y)<f(x_0,y_0)$，则称函数在(x_0,y_0)有极大值；若满足不等式$f(x,y)>f(x_0,y_0)$，则称函数在(x_0,y_0)有极小值；

注意：这里要求严格小于。

极大值、极小值统称为**极值**.

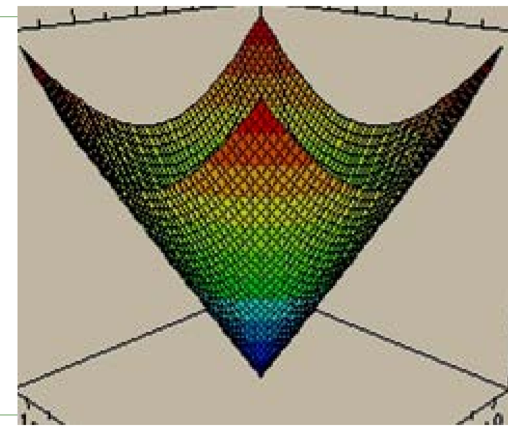
使函数取得极值的点称为**极值点**.

例1 函数 $z = 3x^2 + 4y^2$ 在 (0,0) 处有极小值.

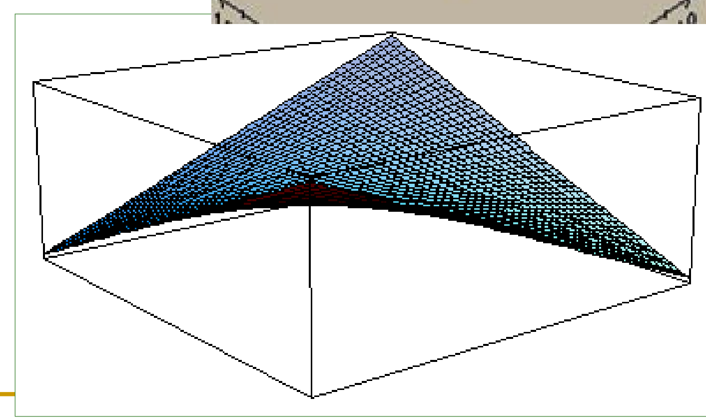


(1)

例２ 函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在 (0,0) 处有极小值.



例３ 函数 $z = xy$ 在 (0,0) 处无极值.



(3)

二、多元函数取得极值的条件

定理1 (必要条件) 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在偏导数, 且在该点取得极值, 则有

$$f'_x(x_0,y_0)=0\,,\quad f'_y(x_0,y_0)=0$$

证: 因 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极值, 故

$z=f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 取得极值

$z=f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 取得极值

据一元函数极值的必要条件可知定理结论成立.

该定理说明偏导数存在并且不等于0的点一定不是极值!

注：1）几何意义:极值点处的切平面平行于*xoy*平面；

2）使一阶偏导数同时为零的点，称为函数的驻点.

注意：　驻点 $\underset{\not\longrightarrow}{\longleftarrow}$ 偏导存在的极值点

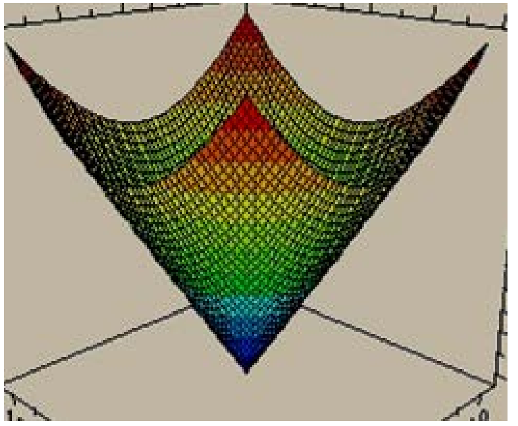
如例 3，　点(0,0)是函数$z = xy$的唯一驻点，
但不是极值点.

如何判定驻点是否为极值点？（稍后回答）

与一元函数类似，可能的极值点除了驻点之外，

偏导数不存在的点也可能是极值点。

如例2，显然函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$



在 $(0,0)$ 处取得极小值.

但函数在 $(0,0)$ 处偏导数

不存在。

结论：极值点必在驻点和偏导数不存在的点中！

把驻点和偏导数不存在的点称为可疑极值点.

定理2 (充分条件)若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的的某邻域内具有一阶和二阶连续偏导数, 且

$$f_x(x_0, y_0) = 0,\ f_y(x_0, y_0) = 0$$

令 $A = f_{xx}(x_0, y_0),\ B = f_{xy}(x_0, y_0),\ C = f_{yy}(x_0, y_0)$

则: 1) 当 $AC - B^2 > 0$ 时, 具有极值 $\begin{cases} A<0 \text{ 时取极大值;} \\ A>0 \text{ 时取极小值.} \end{cases}$

2) 当 $AC - B^2 < 0$ 时, 没有极值.

3) 当 $AC - B^2 = 0$ 时, 不能确定, 需另行讨论.

不证明，自己看第二节(P108) .

例4. 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$的极值.

解： 第一步 求驻点.

第二步 判别. 求二阶偏导数

由上例可知:

求函数 $z = f(x,y)$ 极值的一般步骤:

第一步　解方程组 $f_x(x,y) = 0,\quad f_y(x,y) = 0$

求出实数解，得驻点.

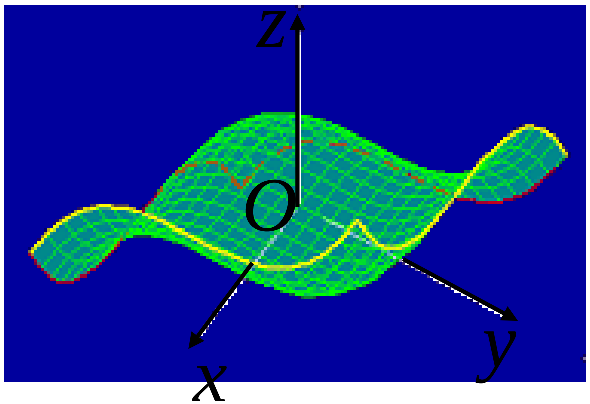
第二步　对于每一个驻点(x_0, y_0),

求出二阶偏导数的值 A、B、C.

第三步　定出$AC - B^2$的符号，再判定是否是极值.

注意:　如果$AC - B^2 = 0$，只能用定义判定是否是极值!

例5.讨论函数 $z = x^3 + y^3$ 及 $z = (x^2 + y^2)^2$ 在点(0,0)是否取得极值.



推广 如果三元函数$u = f(x, y, z)$在点$P(x_0, y_0, z_0)$具有偏导数，则它在$P(x_0, y_0, z_0)$有极值的必要条件为

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \qquad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

$$f_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

3、最值应用问题

函数 f 在闭域上连续

$\Downarrow$

函数 f 在闭域上可达到最值

$$\text{最值可疑点}\begin{cases}\text{驻点}\\ \text{偏导不存在的点}\\ \text{边界上的最值点}\end{cases}$$

我们可以把最值问题分为两类：

（1）连续函数在开区域上的最值：

方法：将函数在D内的所有驻点和偏导不存在的点处的函数值相互比较，其中最大者即为最大值，最小者即为最小值.

（2）连续函数在闭区域上的最值：

方法：将函数在D内的所有驻点处的函数值及在D的边界上的最大值和最小值相互比较，其中最大者即为最大值，最小者即为最小值.

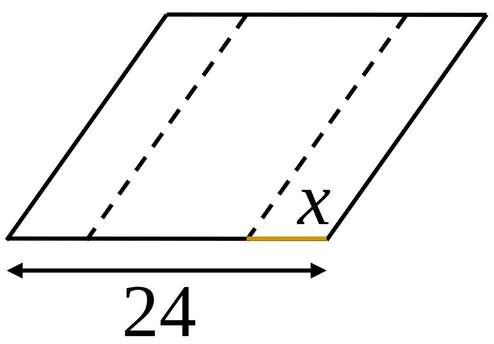
特别，当区域内部最值存在，且只有一个极值点P时，

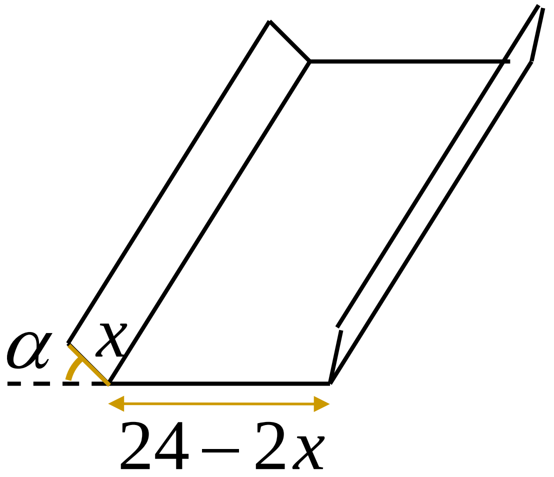
$$f(P)\text{为极小值} \Longrightarrow f(P)\text{为最小值}$$

（大）　　　　　　（大）

更特别的，当可微函数在区域内部有最值存在，且只有唯一的驻点时，则该点必是该最值点！

例6. 有一宽为 24cm 的长方形铁板，把它折起来做成一个断面为等腰梯形的水槽，问怎样折法才能使断面面积最大.





例7. 某厂要用铁板做一个体积为2 m^3的有盖长方体水箱,问当长、宽、高各取怎样的尺寸时,才能使用料最省?

思考题： 求二元函数

$$z = f(x, y) = x^2 y(4 - x - y)$$

在直线 $x + y = 6$，x轴和y轴所围成的闭区域D上的最大值与最小值.