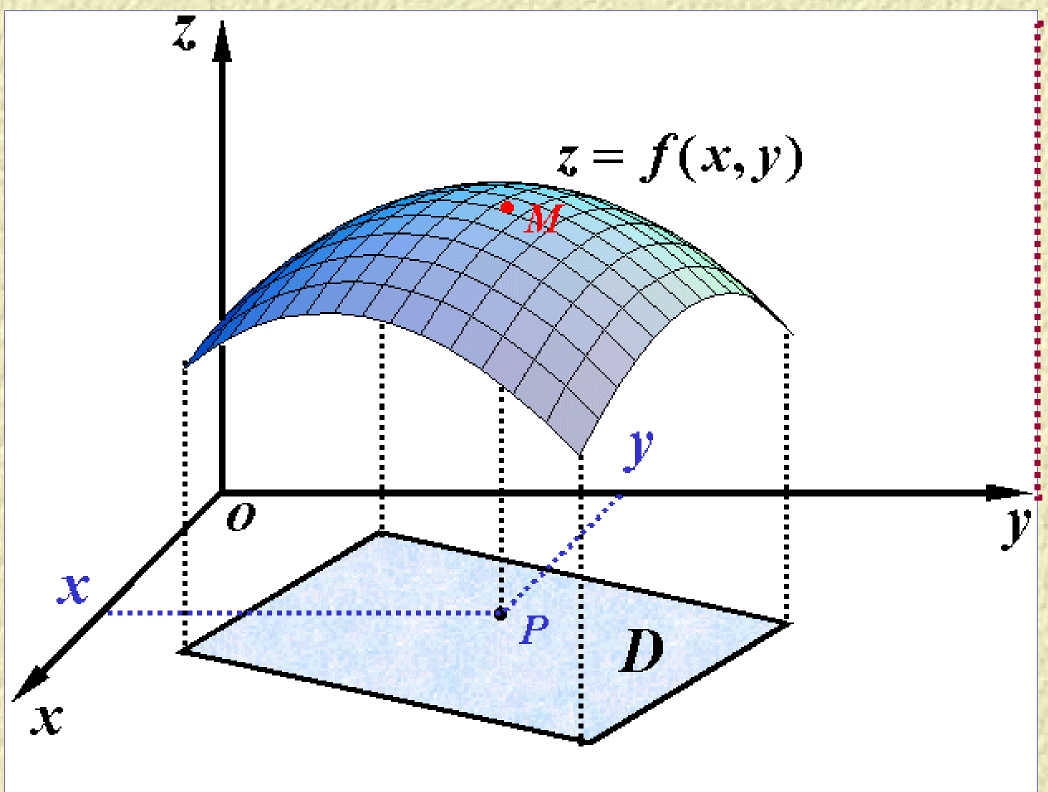
二元函数的图象：

二元函数$z=f(x,y)$能够用三维空间$\mathbf{R}^3$的几何图象表示. 称$\mathbf{R}^3$中点集：

$$\{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y)\in D\}$$

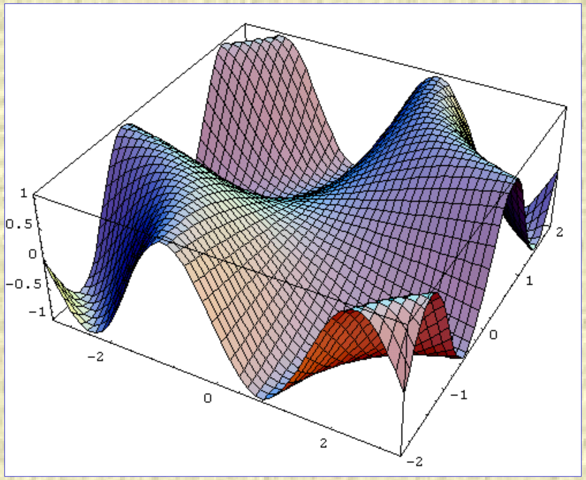
为函数$z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$的图象.



二元函数 f 的图象通常是一张曲面. f 的定义域D便是这张曲面在xoy平面上的投影.

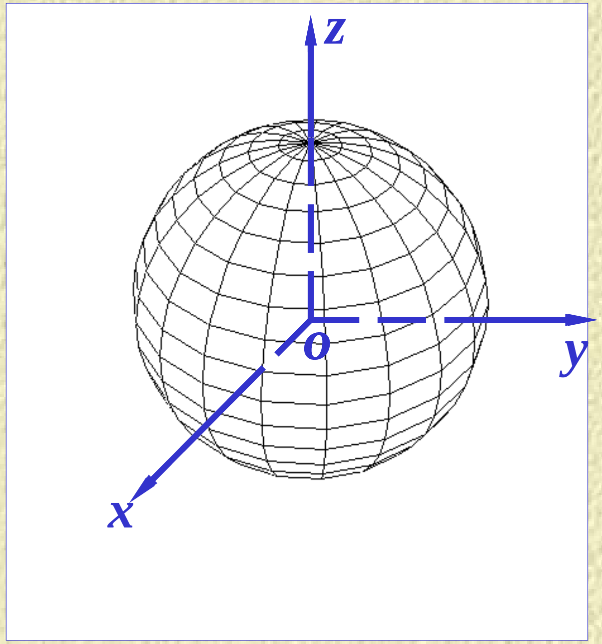
例如，$z=\sin xy$

图形如右图.



例如，$x^2+y^2+z^2=a^2$

如左图球面.



$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2\}.$$

单值分支：$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

$$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

2. 定义域:

例5. 求定义域:

$$(i).\quad f(x,y)=\frac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2-1}};\quad (ii)\ f(x,y)=\frac{\ln y}{\ln(y-x^2+1)}.$$

上页 下页 返回

例6 求 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的定义域.

解

上页 下页 返回

3. 二元函数求值

例7. $f(x,y)=2x-3y^2$,求 $f(1,-1)$, $f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$.

例8. $f(x,y)=\ln(1+x^2+y^2)$, 求 $f(\rho\cos\theta\ ,\rho\sin\theta)$.

上页 下页 返回

定义:若二元函数的值域是有界数集,则称此函数为有界函数；若二元函数的值域是无界数集，则称此函数为无界函数。

复习空间解析几何中,

二元函数$z=f(x,y)$的图象作法:

(1) 函数$z=1-x-y$的图象;

(2) 函数$z=x^2+y^2$的图象;

(3) 函数$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$的图象;

(4) 函数$z=xy$的图象.

六. n元函数

定义：所有n个有序实数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的全体

称为n维向量空间，简称n维空间，记作$\mathbf{R}^n$.

其中每个有序实数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

称为$\mathbf{R}^n$中的一个点.

n个实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$是这个点的坐标.

定义：设点集$E \subset \mathbf{R}^n, M \subset \mathbf{R}$.

如果按照某一确定的对应法则f，E中每一点

$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$都有唯一的一个实数$u \in M$

与它相对应，则称f是定义在E上的n元函数，

记作 $f: E \to M$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto u$$

或$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E$

或$u = f(P)$, $P \in E$

其中E称为函数f的定义域,

$x_1, x_2, \cdots, x_n$称为f的自变量, u称为f的因变量.

(也称u是$x_1, x_2, \cdots, x_n$的函数)

三元函数和三元以上的函数没有直观几何图象,

称$\mathbf{R}^{n+1}$中点集:

$$\left\{ \left(x_1, x_2, \cdots, x_n, f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \right) \middle| (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n \right\}$$

为函数$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的图象.

(认为是$\mathbf{R}^{n+1}$中的一个超曲面.)